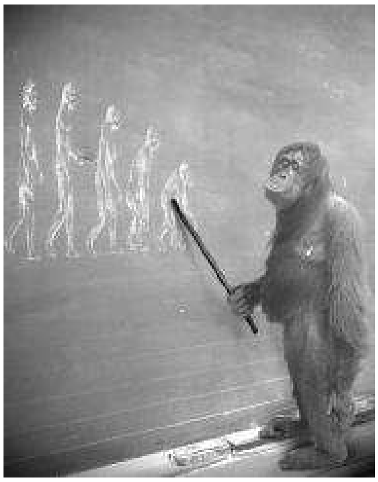
CHAPITRE 2

Suites numériques



I - Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

C'est une suite... de nombres dont chaque membre porte un dossard numéroté.
Par exemple l'ensemble des multiples entiers positifs de 10 classés par ordre croissant est une suite (numérique[a]).
On peut la décrire de diverses façons :
- à l'aide d'une phrase comme nous venons de le faire ;
- en décrivant l'ensemble de ses éléments : l'ensemble des réels x tels qu'il existe un entier naturel n vérifiant $x = 10n$;
- en donnant l'expression d'un terme quelconque de la suite en fonction de son rang (son« numéro de dossard »). Ici, le terme de rang k est $10k$, quelque soit l'entier naturel non nul k ;
- en exprimant comment on obtient un terme en fonction du précédent. Ici, un terme quelconque est égal au terme précédent plus 10, sachant que le premier vaut 0. On dit qu'on définit ainsi la suite par une relation de *récurrence* ;
- etc.

En fait, à chaque numéro de dossard correspond un seul nombre. On définit ainsi une fonction : une suite est en fait un cas particulier de fonction qui est définit sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des numéros de dossard, enfin des entiers naturels je veux dire.

Définition 1 : suite numérique

Une suite (sous-entendue numérique) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur une partie seulement de $\mathbb{N}$.
Définir une suite, c'est donc associer un nombre réel à tout élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

Dans notre exemple précédent, appelons d cette suite. Alors on peut écrire : $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 10n \end{array}$. Ainsi, le multiple numéro 3 est $d(3) = 10 \times 3 = 30$

Notation usuelle

Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
La suite d est de *terme général* d_n. Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).
On appelle d_n le *terme d'indice* n ou encore le *terme de rang* n.

a. comme on n'étudiera que celles-ci, on écrira suite pour suite numérique par la suite

Attention !

Il ne faudra pas confondre le *nombre* d_n avec la *suite* (c'est-à-dire fonction) (d_n)...

Exemple 1 :

Décrivez la suite (p_n) des entiers naturels pairs.

II - Suite dont le terme général est donné explicitement

En fait, cela veut dire que l'on connaît l'expression de u_n en fonction de n et que l'on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite.

Définition 2 : suite définie explicitement

Soit D une partie de $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur n. Soit u une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in$ D. On dit alors que u est définie explicitement.

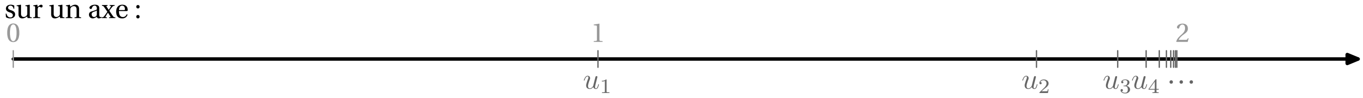
Exemple 2 :

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

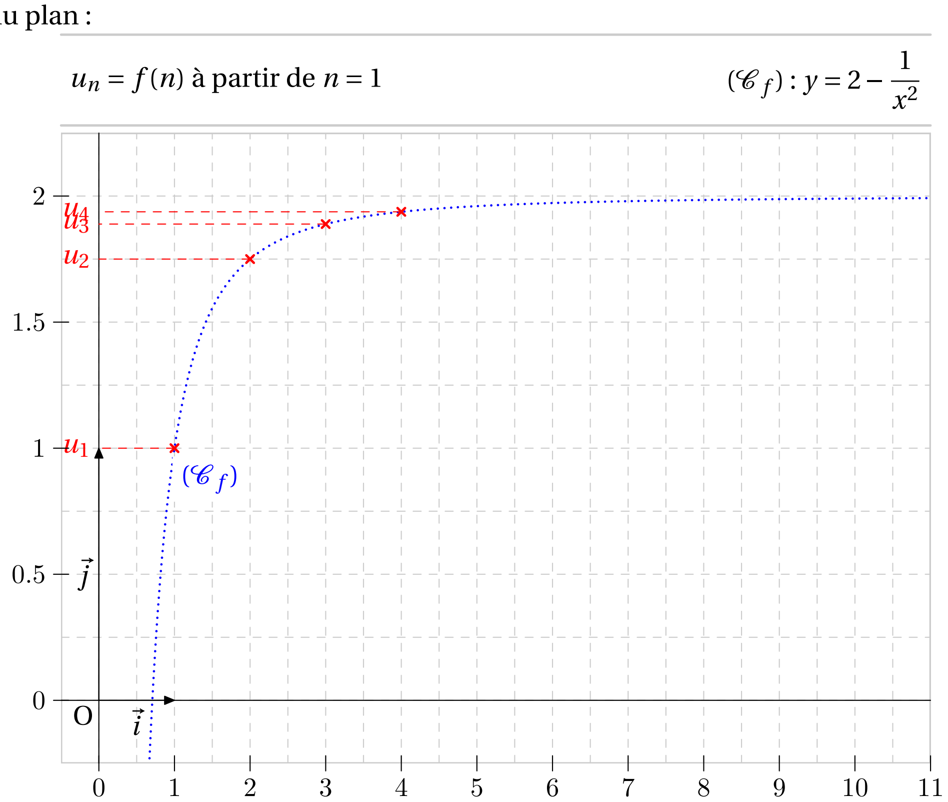
On obtient par exemple $u_1 =$................., $u_2 =$................., $u_{10} =$........................

On peut même tracer sa représentation graphique. On peut le faire

– sur un axe :



– dans un repère du plan :



Attention !

La représentation graphique de la suite n'est constitué que par les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses entières : il ne faut donc pas les relier mais laisser des petites croix isolées.

Rien de bien nouveau par rapport aux fonctions mais attendez la suite...

III - Suite définie par une relation de récurrence

Exemple 3 :

Il nous faut un point de départ : posons par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Ensuite, il nous faut un petit algorithme, comme dans les dessins de maternelle...
Disons ici que chaque terme est égal à la somme des deux précédents. Calculez les 10 premiers termes de la suite.

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 =$................, $u_3 =$................,$u_4 =$................,$u_5 =$................
$u_6 =$..................,$u_7 =$....................,$u_8 =$.....................,$u_9 =$......................
$u_{10} =$......................
Pouvez-vous calculer le 137$^{\text{ème}}$ terme de cette suite [b] ?

Définition 3 : suite définie par une relation de récurrence

C'est une suite dont on connaît le(s) premier(s) terme(s) et dont un terme quelconque est défini en fonction des termes précédents.

Exemple 4 :

Soit s et t les suites définies par :

$$s : \begin{cases} s_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ s_n = 1 + \frac{1}{s_{n-1}} \end{cases} \qquad t : \begin{cases} t_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ t_n = \sqrt{1 + t_{n-1}} \end{cases} .$$

Calculez les valeurs approchées à 10^{-4} près des 10 premiers termes de chaque suite.

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice

On commence par entrer le premier terme. Par exemple pour s :
1 EXE
Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :
1 + 1 ÷ [Ans] EXE
ensuite, on tape sur EXE pour obtenir les termes suivants.

b. Cette suite est célèbre et porte le nom de « suite de Fibonacci » du surnom du mathématicien italien Leonardo Pisano(1175 - 1250). Cette suite présente d'innombrables propriétés remarquables. Fibonacci l'avait utilisée pour décrire l'évolution d'une population de lapins immortels. Plus tard, un romancier américain opportuniste a fait fortune en en parlant dans un roman portant le nom d'un autre Leonardo...

Avec un logiciel programmable, on peut écrire ça :

```
s:=1; S:=s;
   pour k de 1 jusque 10 faire
          s:=1+1/s;
          S:=S,approx(s);
   fpour;
```

1, 1, 1, 2.000000, 1.500000, 1.666667, 1.600000, 1.625000, 1.615385, 1.619048, 1.617647, 1.618182, 1.617978

```
t:=1; T:=t;
   pour k de 1 jusque 10 faire
          t:=sqrt(1+t);
          T:=T,approx(t);
   fpour;
```

1, 1, 1, 1.414214, 1.553774, 1.598053, 1.611848, 1.616121, 1.617443, 1.617851, 1.617978, 1.618017, 1.618029

Il existe également des modes spécifiques pour étudier les suites définies par une relation de récurrence.

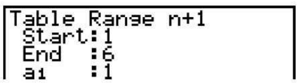
Sur les TI

On tape [mode] puis sur la quatrième ligne on sélectionne(`Suit`)
On va ensuite sur [$f(x)$] . On entre nMin=1, u(n)= [1] [+] [1] [÷] [2nde] [u_n] [(] [x, t, θ, n] [−] [1] [)]
On va ensuite sur [table] ou sur [calculs] [entrer] et on choisit le rang désiré.

Sur les Casio

On va dans le menu 

Choisissez le mode correspondant au type de récurrence, ici [F2], puis la formule [1] [+] [1] [÷] [F4] [F2] (pour sélectionner a_n) puis [EXE] .
Il reste à faire quelques réglages sur [F5] (RANG) :



et à demander la table [EXIT] [F6]

IV - Sens de variation d'une suite

a. Définition

Définition 4 : suite (strictement) croissante

Dire qu'une suite u est (strictement) croissante signifie que chaque terme est (strictement) supérieur au précédent. Par exemple, si u est définie sur $\mathbb{N}$:

$$u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \cdots$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$$

On obtient le même type de définition pour les suites décroissantes :

Définition 5 : suite (strictement) décroissante

Dire qu'une suite u est (strictement) décroissante signifie que chaque terme est (strictement) inférieur au précédent. Par exemple, si u est définie sur $\mathbb{N}$:

$$u_0 > u_1 > u_2 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$$

Une suite ne changeant pas de sens de variation porte un nom spécial :

Définition 6 : suite monotone

Une suite qui est *toujours* (strictement) croissante OU *toujours* strictement décroissante est dite (strictement) **monotone**.

b. Caractérisation des suites monotones

Théorème 1 : Caractérisation des suites monotones

Pour prouver qu'une suite u définie sur une partie I de $\mathbb{N}$ est croissante, il suffit de prouver que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathrm{I}$

Exemple 5 :

Étudiez le sens de variation de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n-3}{n+2}$

Soit n un entier naturel quelconque. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$u_{n+1} - u_n =$

c. Cas particulier des fonctions définies explicitement

Théorème 2 : variations des suites définies explicitement

Si f est une fonction définie sur un ensemble E et u une suite définie sur une partie de $\mathbb{N}$ incluse dans E par $u_n = f(n)$, alors SI f est strictement monotone sur E, alors la suite u a le même sens de variation.

Étudions par exemple le cas d'une fonction f définie et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Comme $n < n+1$ pour tout entier naturel n, on obtient $f(n) < f(n+1)$ car la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et donc conserve l'ordre des nombres positifs.
Cela prouve que $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n et donc que la suite u est strictement croissante comme f.
Le cas d'une fonction décroissante se traite de manière analogue.
Nous en reparlerons au moment d'étudier le sens de variation des fonctions.

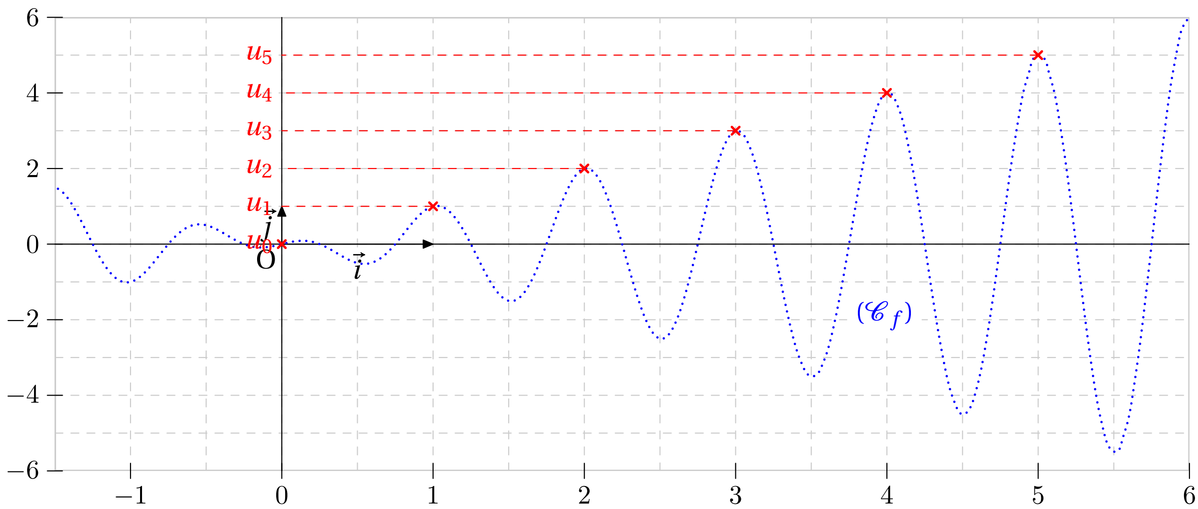
Attention !

SI f est monotone sur un certain ensemble, ALORS u a le même sens de variation.
La Réciproque est fausse ! Étudiez par exemple u définie par $u_n = n\cos(2\pi n)$...

Calculez les premiers termes :

Peut-on simplifier l'expression de u_n ?

Voici sa représentation graphique :



Nous n'avons pas encore les moyens d'étudier rigoureusement la fonction $x \mapsto x\cos(2\pi x)$ mais le graphe est assez explicite à notre niveau actuel.

V - Suites arithmétiques

Nous n'allons étudier que deux cas très particuliers de suites définies par une relation de récurrence.

Le premier cas concerne les suites telles que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple 6 :

Votre mamie vous donne 2 euros 50 tous les ans le 25 décembre. Vous décidez de garder précieusement cet argent dans votre chaussette préférée en vous interdisant d'y toucher pendant les soixante-quinze ans à venir. De quelle somme disposerez-vous après n années ?

Notons C_1 votre capital après un noël et plus généralement C_n votre capital après n noëls.
On a $C_1 = 2,5$ puis $C_2 = 5$, $C_3 = 7,5$, etc.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$C_n = 2,5 \times n$$

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de sommes d'argent qui est en fait une suite numérique de *terme général* $C_n = 2,5n$. C'est un cas particulier qui nous intéresse :

Définition 7 : suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Dans l'exemple 6, si on appelle C_n le capital constitué après n années, $C_{n+1} = C_n + 2,5$ avec $C_0 = 0$: la suite (C_n) est donc une suite arithmétique de raison .... et de premier terme ....

Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?

Par exemple, considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 1$.
Calculons les premiers termes : $u_0 = ...$, $u_1 = ...$, $u_2 = ...$
Calculons $u_1 - u_0 = ...$ et $u_2 - u_1 = ...$ Que pouvons-nous en conclure ?

a. Expression explicite du terme général

Observons les premiers termes d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme a_0 et de raison r :

$$\begin{aligned} a_0 &= & a_0 &= a_0 + 0 \cdot r \\ a_1 &= & a_0 + r &= a_0 + 1 \cdot r \\ a_2 &= & a_1 + r = (a_0 + r) + r &= a_0 + 2 \cdot r \\ a_3 &= & a_2 + r = (a_0 + 2r) + r &= a_0 + 3 \cdot r \\ a_4 &= & a_3 + r = (a_0 + 3r) + r &= a_0 + 4 \cdot r \\ a_5 &= & a_4 + r = (a_0 + 4r) + r &= a_0 + 5 \cdot r \end{aligned}$$

Il semble se dégager que pour n'importe quel entier naturel n, on ait $a_n = a_0 + n \cdot r$

Vérifions que la suite de terme général $u_n = a_0 + n \cdot r$ est bien la suite (a_n) :

- son premier terme est $a_0 + 0 \cdot r = a_0$;
- étudions la différence de deux termes consécutifs quelconques. Soit p un entier quelconque. Calculons $u_{p+1} - u_p$.
  $u_{p+1} - u_p = a_0 + (p+1)r - (a_0 + nr) =$

Conclusion :

Théorème 3 : expression explicite du terme général d'une suite arithmétique

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme a_0 et de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

Expression du terme général en fonction d'un autre terme que celui de rang 0

Soit p un entier supérieur à un entier m.
$a_p = a_0 + p \cdot r$ et $a_m = a_0 + m \cdot r$. Alors $a_p - a_m = \dots$
On obtient donc que $\boxed{a_p = a_n + (p-n)r}$

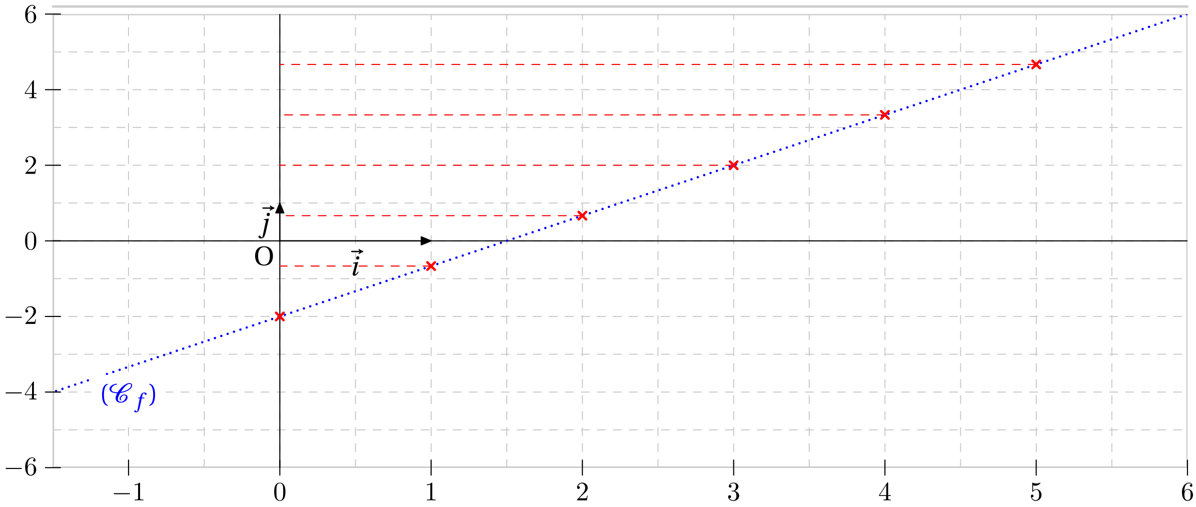
b. Sens de variation d'une suite arithmétique

Il suffit d'observer que pour tout entier naturel n, en gardant les mêmes notations que précédemment, $a_{n+1} - a_n = r$: le sens de variation de la suite dépend donc du signe de r... ce qui est assez logique !

c. Représentation graphique

Avec les mêmes notations, $a_n = a_0 + n \cdot r = f(n)$ avec $f : x \mapsto a_0 + r \cdot x$. La fonction f est donc une fonction affine : sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur r.

Suite arithmétique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme -2



Théorème 4 : représentation graphique d'une suite arithmétique

Les points correspondant aux termes d'une suite arithmétique sont donc alignés sur une droite de coefficient directeur la raison et d'ordonnée à l'origine le premier terme.

d. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Somme des n premiers entiers naturels

On veut calculer $\mathrm{S}_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. La démonstration suivante a été donnée par le jeune Friedrich Gauss à l'âge de 7 ans :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{S}_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
\mathrm{S}_n = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\mathrm{S}_n = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Conclusion $2\mathrm{S}_n = ...$ et donc :

Théorème 5 : somme des n premiers entiers naturels

La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Avec les notations habituelles, nous voulons calculer $\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$\mathrm{T}_n = a_0 + a_0 + r + a_0 + 2r + a_0 + 3r + \cdots + a_0 + nr$
Combien de fois apparaît a_0 dans la somme ?
On peut d'autre part factoriser par r.

Théorème 6 : somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Étant donné une suite arithmétique a de raison r

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1er terme+dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2}$$

VI - Suites géométriques

Nous irons plus vite ici : les preuves seront faites en exercices...

a. Définition

Définition 8 : suite gémétrique

Une suite (g_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} = q \cdot g_n$$

On appelle q la raison de la suite.

b. Expression explicite du terme général

Théorème 7 : expression explicite du terme général d'une suite géométrique

Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme g_0 et de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$g_n = g_0 \cdot q^n$$

c. Sens de variation d'une suite géométrique

Il suffit d'observer que pour tout entier naturel n, en gardant les mêmes notations que précédemment

$$g_{n+1} - g_n = g_0 q^{n+1} - g_0 q^n = q^n g_0 (q-1)$$

Le sens de variation de la suite dépend donc du signe de $g_0(q-1)$.

d. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 8 : somme des premiers termes d'une suite géométrique

Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}} = g_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$