Ultime devoir surveillé de mathématiques - $1^{\text{ère}}$ES3
Jeudi 24 mai 2007 - 2 heures

Exercice 1

Madame Chaprot, PDG d'une société fabriquant de matraques électrodéculotantes destinées aux forces de l'ordre, s'intéresse au coût unitaire de production, en euros, ainsi qu'au bénéfice réalisé pendant une semaine.
On considère que la société fabrique par semaine x lots de matraques où x est un entier compris entre 0 et 100.

Partie A
La courbe donnée en **annexe 1** représente le coût unitaire de production $f(x)$ en fonction du nombre x de lots fabriqués.
On fera figurer sur le graphique tous les tracés utiles.

1. Déterminer graphiquement le coût unitaire de production lorsque la société de madame Chaprot fabrique 70 lots.
Quelle autre quantité de lots fabriqués donne le même coût unitaire de production ?

2. Déterminer graphiquement la quantité de lots que l'entreprise doit produire pour que le coût unitaire soit minimal et préciser la valeur de ce coût.

3. On admet que $f(x)$ a pour expression $f(x) = x^2 + bx + 5\,000$.
Déterminer le réel b sachant que le coût unitaire pour 100 lots est de 6 600 euros.

Partie B

1. Montrer que le coût de production $\mathrm{C}(x)$ pour x lots produits est

$$\mathrm{C}(x) = x^3 - 84x^2 + 5\,000x.$$

2. Chaque lot étant vendu 5 000 euros, justifier que le bénéfice, exprimé en euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x lots est donné par la fonction B définie par :

$$\mathrm{B}(x) = -x^3 + 84x^2.$$

3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\mathrm{B}(x)$ est strictement négatif.
Que va en déduire Madame Chaprot pour sa production ?

4. a) Déterminer $\mathrm{B}'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.

b) Étudier le signe de $\mathrm{B}'(x)$ pour tout x élément de $[0\,;100]$ et dresser le tableau de variations complet de B sur $[0\,;100]$.

c) En déduire le nombre x_{M} de lots que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal $\mathrm{B_M}$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la figure représentée en **annexe 2** et on appelle $\mathscr{D}$ la partie hachurée, bords compris.
Une entreprise veut faire transporter par bateaux au moins 300 prisonniers de droit commun et 400 prisonniers politiques.
Le transporteur maritime auquel elle s'adresse dispose :
▷ de 30 bateaux de type A, susceptibles chacun de transporter 10 prisonniers de droit commun et 10 prisonniers politiques ;
▷ de 35 bateaux de type B, susceptibles chacun de transporter 6 prisonniers de droit commun et 10 prisonniers politiques.
On note x le nombre de bateaux de type A et y le nombre de bateaux de type B à affréter pour effectuer ce transport.

1. Déterminer les équations réduites des droites (CD) et (AD).

2. a) Traduire les informations ci-dessus par un système d'inéquations.

b) Montrer que ce système caractérise la partie $\mathscr{D}$.

3. Le coût d'affrètement d'un bateau de type A est de 10 000 € et celui d'un bateau de type B de 7 500 €.
Soit C le coût total d'affrètement de x bateaux A et y bateaux B.

a) Exprimer C en fonction de x et de y.

b) Déterminer une équation de la droite (d) correspondant à un coût total de 450 000 € et représenter (d) dans la figure tracée sur **l'annexe 2**.

c) Déterminer graphiquement le couple d'entiers $(x\,;\,y)$ qui permet d'assurer le transport pour un coût minimum et calculer ce coût. On justifiera la démarche.

Exercice 3

La courbe $\mathscr{C}$ donnée en **annexe 3** est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, ainsi que de ses tangentes T_A, T_B et T_C aux points A, B et C respectivement.

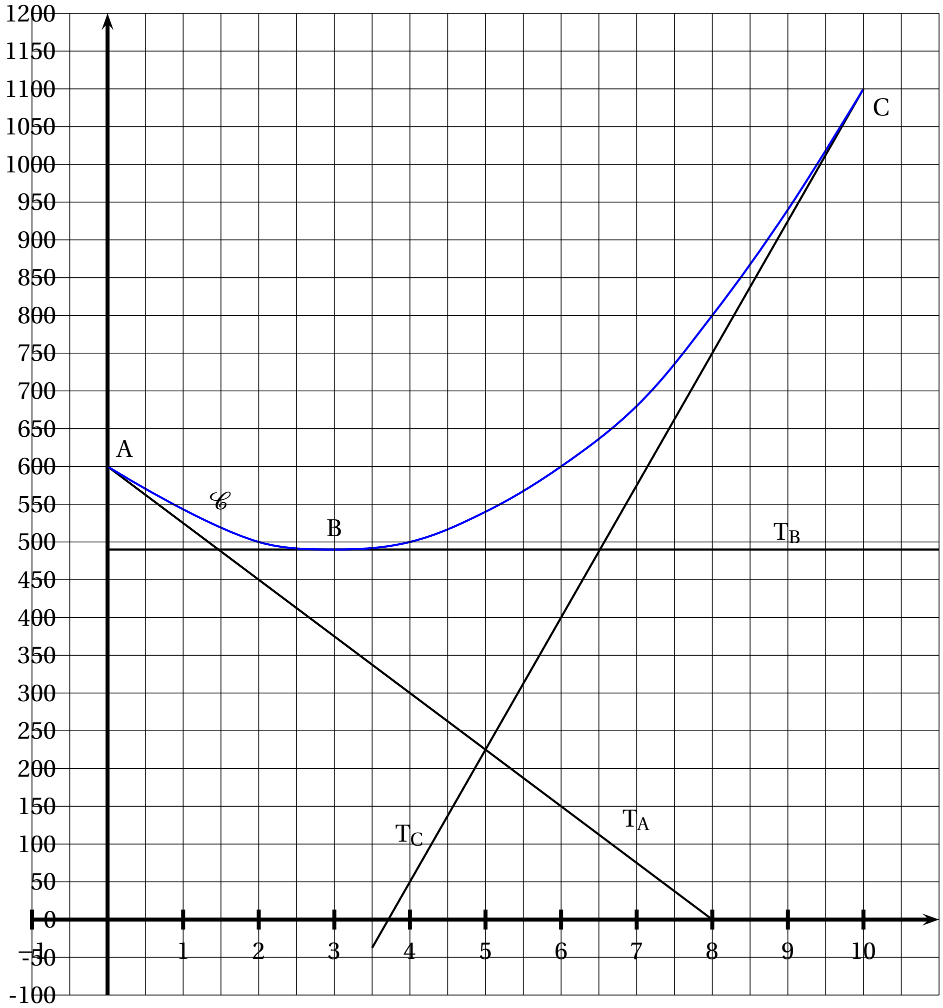
1. Donnez les valeurs exactes de $f(0)$, de $f(2)$, de $f(10)$.

2. Résolvez graphiquement sur $[0\,;\,10]$ l'équation $f(x) = 800$, puis l'inéquation $f(x) \leqslant 600$ en expliquant la méthode utilisée et en laissant apparents les tracés utiles.

3. Donnez les valeurs exactes de $f'(0)$ et de $f'(10)$ en détaillant vos calculs.

4. Résolvez graphiquement sur $[0\,;\,10]$ l'équation $f'(x) = 0$, puis l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ en justifiant votre réponse.

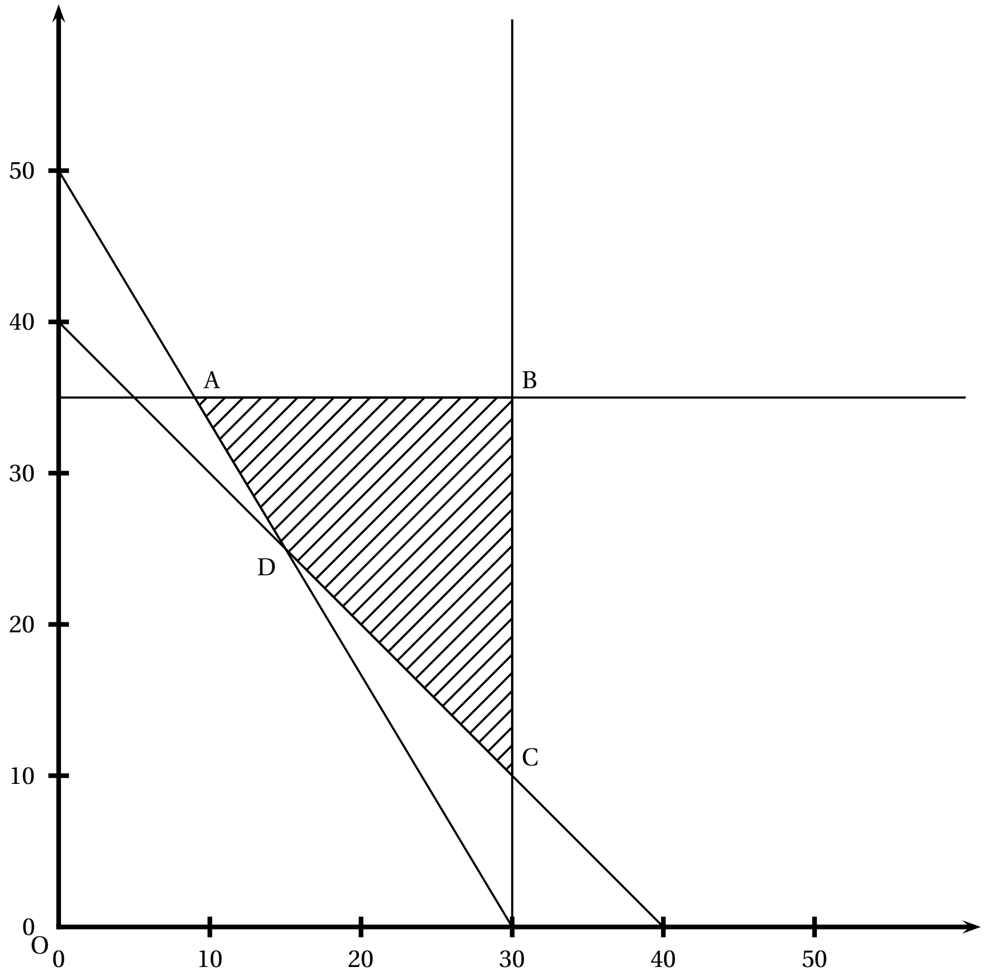
ANNEXE 3



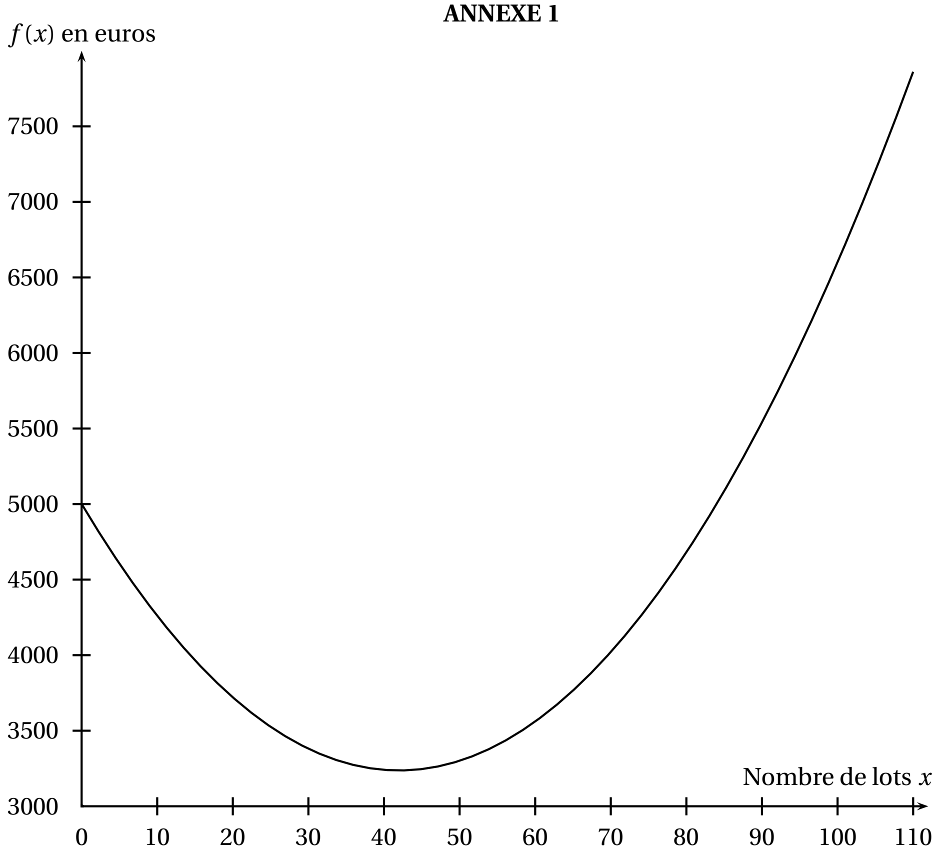
ANNEXE 2

Les points A, B, C, D, ont pour coordonnées :

A(9 ; 35) ; B(30 ; 35) ; C(30 ; 10) ; D(15 ; 25)



ANNEXE 1



$f(x)$ en euros
7500
7000
6500
6000
5500
5000
4500
4000
3500
3000
Nombre de lots x
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110