

Expériences aléatoires

I - Problème du Duc de Toscane

a. Un peu de (petite) histoire

Cosme II de Médicis (Florence 1590-1621), Duc de Toscane, fut le protecteur de l'illustre Galilée (né à Pise le 15 février 1564 et mort à Florence le 8 janvier 1642) son ancien précepteur. Profitant d'un moment de répit du savant entre l'écriture d'un théorème sur la chute des corps et la création de la lunette astronomique, le Grand Duc lui soumet le problème suivant : il a observé qu'en lançant trois dés cubiques et en faisant la somme des numéros des faces, on obtient plus souvent 10 que 9, alors qu'il y a autant de façons d'obtenir 9 que 10, à savoir six.

Après quelques réflexions, Galilée rédigea un petit mémoire sur les jeux de hasard en 1620 expliquant le phénomène.

b. Simulation de l'expérience

N'ayant pas la même expérience du jeu que le bon Cosme, nous allons utiliser notre logiciel favori, XCAS, pour simuler un grand nombre de parties et étudier statistiquement les résultats obtenus.

1. Nous utiliserons en premier lieu `rand(n)` qui renvoie un entier appartenant à l'intervalle $[0; n[$.
Comment utiliser cette commande pour obtenir le résultat du lancer d'un dé? De trois dés?
2. Plutôt que d'appuyer 100 000 fois sur la touche Entrée, nous allons utiliser une commande plus pratique, `ranm(1, nombre d'expériences, 'expérience')` qui renvoie une liste de nombre d'expériences résultats de l'expérience.
Par exemple `ranm(1, 10000, 'rand(3)')` renverra 10000 nombres entiers égaux à 0, 1 ou 2.
Construisez alors une liste T de 100000 tirages de notre problème ducal.
3. On utilisera également `count_eq(n, liste)` qui compte le nombre d'apparitions de n dans la liste liste.
Comptez maintenant le nombre d'apparitions de 9 et 10 dans T puis renouvelez plusieurs fois l'expérience.

c. Simulation à grande échelle

Observez et commentez ce programme :

```
toscane(taille, essais):={
local neuf, dix, T, n, d, s, k, mn, md;
neuf:=NULL; dix:=NULL; //on crée 2 listes vides au départ
for(k:=1; k<=essais; k++){ //on va faire plusieurs essais
T:=ranm(1, taille, 'rand(6)+rand(6)+rand(6)+3');
neuf:=neuf, count_eq(9, T);
dix:=dix, count_eq(10, T);
}
n:=evalf(mean([neuf])/taille)*100; //mean en anglais ?
d:=evalf(mean([dix])/taille)*100;
s:=taille*essais;
mn:=couleur(moustache([neuf]), jaune+rempli+line_width_3);
md:=couleur(moustache([dix]), bleu+rempli+line_width_3);
print("Sur "+s+" essais, la fréquence de sortie de 9 est "+n+
      ", et celle de 10 est "+d+); mn, md;
};;
```

d. Résolution

Comment expliquez ce phénomène? Comparez par exemple à les issues (6,2,2) et (6,3,1).