Algèbre linéaire

Exercice 11 - 33

On travaille dans l'ev $\mathbb{R}^2$:

1. $u = (6, -9)$ et $v = (-10, 15)$. Donner des CL de la famille (u), de la famille (u, v).
2. Que représente $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (u, v)$?
3. Démontrer que $w = (2, -3) \in \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.
4. u et v sont-ils colinéaires ?
5. $\mathcal{F}$ est-elle libre ou liée ?
6. Démontrer que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \operatorname{Vect}(w)$.
7. Démontrer que $(1, 2) \notin \operatorname{Vect}\mathcal{F}$.
8. $t = (1, 2)$, et $\mathcal{F}' = (w, t)$; démontrer que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}') = \mathbb{R}^2$.

Exercice 11 - 34

On sait que $\mathbb{R}^{2\times 2}$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les deux opérations : addition de deux matrices et la multiplication d'une matrice par un réel (scalaire). On considère

$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Démontrer que F est un sev de E puis déterminer deux matrices M_1 et M_2 vérifiant $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$. Cette famille est-elle libre ? A-t-elle d'autres propriétés ?

Exercice 11 - 35

1. Démontrer que toute « sous famille » d'une famille libre est libre.
2. Démontrer que toute « sur famille » d'une famille liée est liée.

Exercice 11 - 36

Dire si les familles $\mathcal{F} = (u_i)$ suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres ou liées :

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$
2. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -2)$
3. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$
4. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$, $u_4 = (12, 155, 703)$

Exercice 11 - 37

Dire si les familles $\mathcal{F} = (u_i)$ suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres ou liées :

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$
2. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -2)$
3. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$
4. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$, $u_4 = (12, 155, 703)$

Exercice 11 - 38

Dire si les familles $\mathcal{F} = (u_i)$ suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont libres ou liées :

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$
2. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -2)$
3. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$
4. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (0, 1, -1)$, $u_4 = (12, 155, 703)$

Exercice 11 - 39

1. $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
2. $\mathcal{F}_2 = (u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 11 - 40

1. On note $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\}$, démontrer que H est un sev de $\mathbb{R}^3$ en déterminant u et v, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de sorte que $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(u, v)$.
2. Donner une famille génératrice de H.
3. La famille (u, v) est-elle libre ?
4. Donner une base de H.
5. Quelle est la dimension de H ?
6. On note $w = (1,2,3)$, démontrer que $w \notin \mathrm{H}$.
7. On note $\mathrm{K} = \mathrm{Vect}(w)$. Donner une base de K.
8. Quelle est la dimension de K ?
9. Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 - 41

1. Démontrer que $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
2. Démontrer que $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
3. $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$ où a, b et c sont des réels fixés. Dans quel cas a-t-on $\mathrm{H} = \mathbb{R}^3$? Démontrer que H est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 - 42

On travaille dans $\mathbb{R}^3$:

1. Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ par la méthode de la ℓ-réduite échelonnée.
2. On note $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\right\}$ et $\mathrm{K} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\right\}$. Déterminer une base de $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$.

Exercice 11 - 43

On travaille dans $\mathbb{R}^3$ et on note $u = (1,2,2)$ et $v = (-2,1,2)$. Déterminer des réels a, b et c pour que $\mathrm{Vect}(u, v) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$.

Exercice 11 - 44

1. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{K}^n$. Qu'appelle-t-on la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$? On note P cette matrice, à quoi sert-elle ?
2. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et A est la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que le rang de A est 3. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 11 - 45

$u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (2,3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Expliciter la base canonique.
2. Quelles sont les coordonnées de u_2 dans $\mathcal{B}$?
3. Quelles sont les coordonnées de e_1 dans $\mathcal{B}$?
4. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$.
6. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à B. Que représentent les colonnes de cette matrice ?

7. Déterminer les coordonnées de u_1 dans la base $\mathcal{F}$.
8. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{F}$.
9. $x = (-1,5)$, déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{F}$.
10. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}' = (-3u_2, 7u_1)$.

Exercice 11 - 46

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $x = (2,3,-5)$, déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,2)$, $w = (2,0,2)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs u, v et w dans la base B ainsi que la matrice A de la famille F = (u, v, w) dans B.
3. Vect $(\mathcal{F})$ est-il un sev de $\mathbb{R}^3$?
4. Déterminer la LRÉ de A. Quel est le rang de A ?
5. Démontrer que $\mathcal{F}$ est libre.
6. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Est-il vrai que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$?
8. Déterminer la matrice A$'$ de la famille $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}$.
9. Déterminer la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{F}$ et la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.
10. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{F}$.
11. Démontrer de plusieurs façons que $\mathcal{G} = (u, v)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 - 47

$f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f\right)$.

1. f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Quelles sont les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$?
3. Quelles sont les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$?
4. Quelles sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ si $x = e_1 + e_2 - 2e_3$?
5. Qu'est $\ker f$?

Exercice 11 - 48

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On donne :

$$\text{la lré de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Déterminer la matrice A de la famille $\mathcal{F}$ dans la base B.

2. Donner la lré de A.

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

  a. Que représentent les colonnes de A ?

  b. Déterminer $\mathcal{B}$ la matrice de la famille $\left(f(u_1), f(u_2), f(u_3)\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

  c. On note $\ker(f)$ le noyau de f, définir $\ker(f)$.

  d. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

  e. Déterminer une base de $\ker(f)$, on notera $\mathcal{F}_{\ker}$ cette famille.

  f. Donner une famille génératrice de $\mathbf{Im}(f)$.

  g. Déterminer une base de $\mathbf{Im}(f)$. On notera $\mathcal{F}_{\mathbf{Im}}$ cette famille.

4. On note $\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ la famille obtenue en juxtaposant le ou les vecteurs de $\mathcal{F}_{\mathbf{Im}}$ et le ou les vecteurs de $\mathcal{F}_{\ker}$. On admet que $\mathcal{B}'$ est une base (il suffit de vérifier qu'elle est libre) ; x'_1, x'_2 et x'_3 désignent les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ dans cette base.

  a. Déterminer H la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

  b. On note U la matrice de f relativement ou dans la base $\mathcal{B}'$, $\mathrm{U} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, exprimer U en fonction des matrices H et A.

5. On note g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$x\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \rightarrow g(x)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

et g est manifestement un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

  a. Déterminer V la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$.

  b. Déterminer une base de $\ker(g)$.

  c. Déterminer une base de $\mathbf{Im}(g)$.

  d. Exprimer en fonction de V et de H la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

  e. Exprimer à l'aide "de lettres" la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 11 - 49

$\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de l'e.v. $\mathbb{R}^3$, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{A} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Démontrer que $\mathcal{F} = \left(f(u), f(v), f(w)\right)$ est une famille libre et donc que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 11 - 50

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire φ de $\mathbb{F}_2^3$ dans $\mathbb{F}_2^5$ relativement aux bases canoniques.

1. Démontrer que φ est injective. Déterminer $\ker\varphi$.

2. Déterminer une base de $\mathbf{Im}\varphi$. Quelle est la dimension de $\mathbf{Im}\varphi$? φ est-elle surjective ? Donner une matrice génératrice de $\mathbf{Im}\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{F}_2^5$.

3. Quelle est la dimension de $\mathbf{Im}\varphi$?