Similitudes

I - Définitions

a. Approche géométrique

Mathémator : Si je vous dis transformation du plan, à quoi pensez-vous ?

Téhessin : À des points qui se transforment en d'autres points et qui gardent plein de propriétés intéressantes : les longueurs, les angles, les alignements, le parallélisme se conservent. Il y a juste une exception avec l'homothétie qui multiplie les longueurs.

Mathémator : C'est en effet un résumé de vos aventures géométriques des années passées. Depuis, vous avez rencontré, lors de l'étude des nombres complexes notamment, d'autres transformations plus étranges, qui transforment des droites en cercles ou en tout autre chose d'ailleurs

. Nous allons nous occuper aujourd'hui d'une catégorie bien particulière de transformations, parmi bien d'autres : les similitudes, dont nous allons donner la définition, mais avant, il faudrait s'entendre sur ce qu'est une transformation du plan...

Définition 1

On dit que f est une **transformation du plan** si

- ▷ tout point du plan a une unique image par f
- ▷ tout point du plan admet un unique antécédent par f

Par exemple, une projection orthogonale n'est pas une transformation du plan selon notre définition.

Une similitude, elle, est définie par

Définition 2

Une **similitude** est une transformation du plan qui conserve les rapports de longueurs

C'est à dire que, avec des notations habituelles et des points distincts, $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$

On peut utiliser une formulation équivalente

Théorème 1

Soit k un réel strictement positif.

Une **similitude de rapport k** est une transformation du plan qui multiplie les distances par k.

Ainsi, si les points A et B ont pour images A′ et B′, alors $A'B' = k \cdot AB$

Je vous laisse monter *l'équivalence* de ces deux formulations.

b. Premier exemple

Pouvez-vous me donner des exemples de similitudes ?

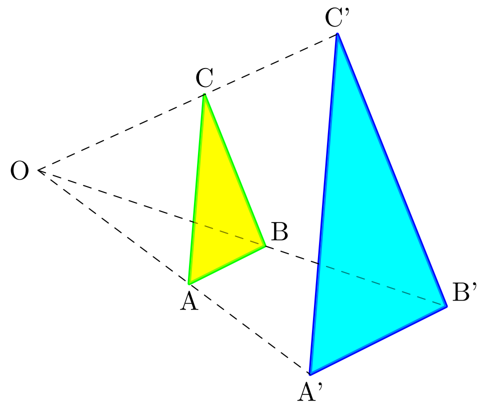
Téhessin : Je ne vois guère que les homothéties dont nous parlions à l'instant.

Mathémator : Vraiment ? Quoi qu'il en soit, il faudrait d'abord rappeler ce qu'est une homothétie...

Définition 3

Soit C un point du plan et λ un réel non nul.
On appelle **homothétie de centre C et de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** la transformation qui à tout point M du plan associe le point M′ tel que

$$\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$$



Maintenant, une homothétie est-elle une similitude ?

Téhessin : Je vous l'ai dit, c'est une similitude de rapport λ.

Mathémator : Ahhh...jeunesse. Soient M et N deux points du plan et M′ et N′ leur images par l'homothétie de rapport λ. Alors $\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN'} = \lambda\overrightarrow{CN}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CN'} = \lambda\overrightarrow{MC} + \lambda\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{MN}$. Nous en déduisons que $M'N' = |\lambda|MN$: eh oui, λ peut être négatif, mais pas le rapport de la similitude. Une homothétie est donc une similitude de rapport la valeur absolue du rapport de l'homothétie.

Téhessin (à part) : *Ouais, bon, c'est presque pareil...*

II - Produit scalaire et angles

a. Conservation des angles non orientés

Mathémator : Comme vous l'avez vu en classe de $1^{\text{ère}}$, les angles sont intimement liés au produit scalaire.

Propriété1

Soient M, N et P trois points du plan d'images respectives M′, N′ et P′ par une similitude de rapport k. Alors

$$\overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{M'P'} = k^2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$$

Pour s'en convaincre, il faudrait utiliser une formulation du produit scalaire n'utilisant que les normes, car nous n'avons que les distances à notre disposition. Vous vous souvenez sûrement que

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\| - \left\|\vec{v}\right\|\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\| - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)\end{aligned}$$

Nous obtenons ici

$$\overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{M'P'} = \frac{1}{2}\left(M'N'^2 + M'P'^2 - N'P'^2\right) = \frac{1}{2}\left(k^2MN + k^2MP - k^2NP\right) = k^2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$$

Nous pouvons enfin relier le produit scalaire aux angles non orientés par la formule

$$\cos(\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$

avec $(\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})})$ l'unique antécédent de $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ par la fonction cosinus dans $[0,\pi]$.
qui vous va vous permettre de démontrer qu'une similitude conserve les angles géométriques.

Téhessin : Euh...

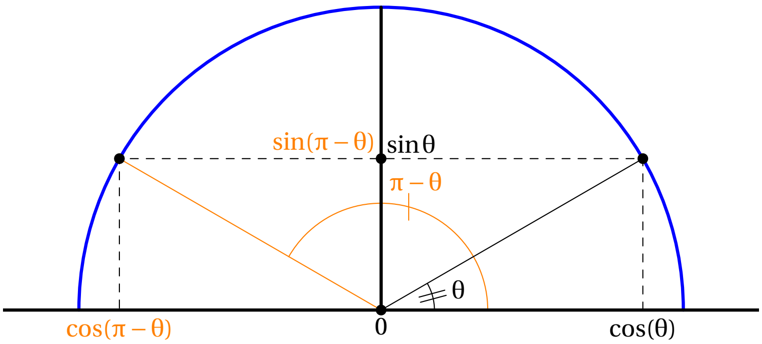
Mathémator : Rappelez-vous vos folles années de collège : que pouvez-vous dire de deux angles géométriques ayant le même cosinus ?

Téhessin : Ils sont égaux !

Mathémator : Enfin, disons qu'ils sont de même mesure. Et si les sinus sont égaux ?

Téhessin : Ben c'est pareil.

Mathémator : Heum heum... Un petit dessin peut-être...



Téhessin : Effectivement...Donc pour prouver que les angles géométriques sont conservés, il suffit de montrer que les cosinus sont conservés.

Mathémator : Voilà ! Combien de points doit-on considérer ?

Téhessin : Trois pour former un angle.

Mathémator : En fait 6 : 3 points M, N et P et leurs images M′, N′ et P′.

Téhessin : Alors $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M'N'}};\overrightarrow{\mathrm{M'P'}}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{M'N'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{M'P'}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{M'N'}}\right\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{M'P'}}\right\|} = \dfrac{k^2\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}}{k\left\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right\|\times k\left\|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right\|} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MN}};\overrightarrow{\mathrm{MP}}}\right)$: ça marche !

> **Propriété2**
> Une similitude conserve les angles géométriques

Téhessin : Mais au fait, pourquoi précisez-vous « angles géométriques » ? Je suis en terminale S quand même ! Et j'ai découvert depuis longtemps les angles orientés.

Mathémator : Si vous regardez bien la propriété du produit scalaire rappelée juste au-dessus, vous remarquerez qu'il n'est fait question que d'angles mesurés dans $[0,\pi]$, c'est à dire d'angles géométriques. Cela va jouer un rôle primordial par la suite, car nous distinguerons deux grandes familles de similitudes : celles qui conservent les angles orientés, qu'on qualifiera de similitudes directes, et les autres, qu'on nommera similitudes indirectes.

b. Conservation des angles orientés

Mathémator : Pour faciliter notre travail, nous disposons depuis peu de l'outil complexe : c'est un peu moins joli que la géométrie pure, mais cela nous permet de gagner un peu en concision.

Téhessin : Je vois : au lieu de couler à moins dix mille mètres, vous me proposer de suffoquer en surface. J'apprécie votre humanité.

Mathémator : Reprenons nos trois petits points M, N et P d'affixes m, n et p et leurs images par une similitude respectivement primées.

Notons $\mathrm{Z}=\dfrac{p-m}{n-m}$ et $\mathrm{Z}'=\dfrac{p'-m'}{n'-m'}$. Comment interprétez-vous géométriquement ces deux nombres ?

Téhessin : C'est toujours pareil[a] : en fait $\mathrm{Z}=\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{MP}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{MN}}}}$ et idem pour les primes. Alors

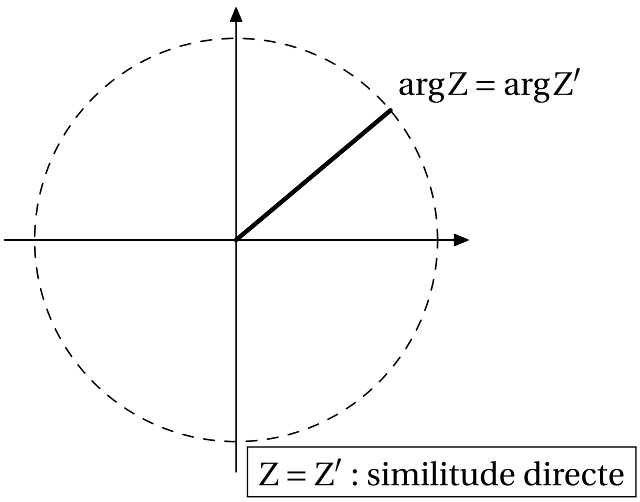
- ▷ $|\mathrm{Z}|=\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$ et $|\mathrm{Z}'|=\dfrac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{M'N'}}$
- ▷ $\arg \mathrm{Z}=\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}},\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)$ et $\arg \mathrm{Z}'=\left(\overrightarrow{\mathrm{M'N'}},\overrightarrow{\mathrm{M'P'}}\right)$

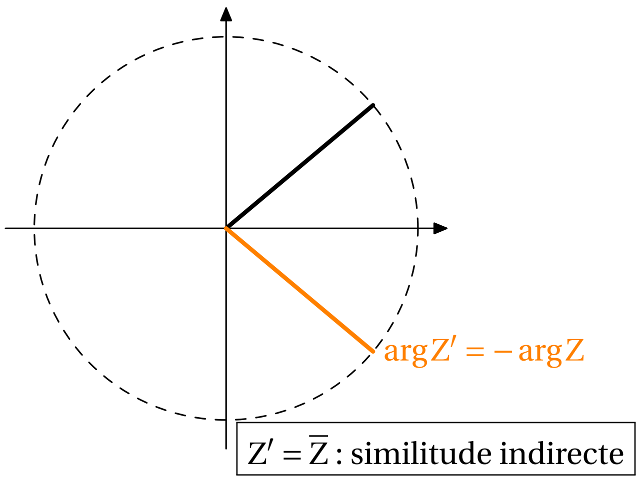
Mathémator : Certes, mais vous n'avez pas agit en spécialiste : une similitude étant en jeu, certaines propriétés sont conservées.

Téhessin :

- ▷ Les rapports de distances se conservent, donc $|\mathrm{Z}|=\mathrm{MP}/\mathrm{MN}=\mathrm{M'P'}/\mathrm{M'N'}=|\mathrm{Z}|$
- ▷ Les angles non orientés se conservent, mais là, je ne vois pas trop comment faire intervenir les complexes.

Mathémator : Les mesures des arguments sont définies à 2π près, donc on peut choisir leurs valeurs principales dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Pour faire le lien avec les angles non orientés, il suffit de remarquer que la mesure de l'angle non orienté est en fait la valeur absolue de l'angle mesuré dans $]-\pi,\pi]$[b]
Résumons-nous : $|\mathrm{Z}'|=|\mathrm{Z}|$ et $\arg \mathrm{Z}'=\pm\arg \mathrm{Z}$, donc deux cas se présentent selon le plus ou le moins, ce qui nous amène à classer les similitudes en 2 catégories.





III - Isométries

Mathémator : Mon petit Téhessin, vous qui êtes un helléniste distingué, vous pouvez me parler de l'étymologie du mot *isométrie*.

Téhessin : Hein ?

Mathémator : Je vois, je vois...Un être normalement cultivé reconnaît ισοσ (égal) et μετρον (mesure), ce qui l'incite à penser que les isométries conservent les longueurs.

Téhessin : Je ne connais pas d'Hellène, mais les isométries, ça m'connaît !

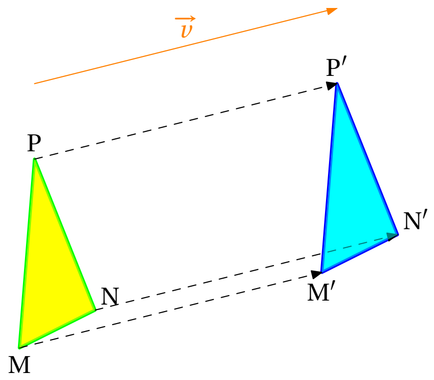
Mathémator : Et bien donnez-moi par exemple la définition d'une translation.

Téhessin : Et je vous ferai même un dessin[c]

Définition 4
La **translation** de vecteur $\vec{v}$ est la transformation qui à tout point M associe le point M′ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}}=\vec{v}$$

[a] Quel frimeur ce Téhessin, quand on voit ce qu'il donne à l'écrit...
[b] On est un peu gêné aux entournures par la vague définition de l'argument en terminale, mais on ferme un peu les yeux et on comprend bien ce qui se passe.
[c] Tu parles ! C'est pas lui qui se colle la programmation des figures sur MetaPOST ?...



Mathémator : Est-ce une similitude ?

Téhessin : Normalement c'est une isométrie : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{v} + \overrightarrow{MN} + \vec{v}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, et ainsi $MN = M'N'$. Une translation est bien une similitude de rapport 1.

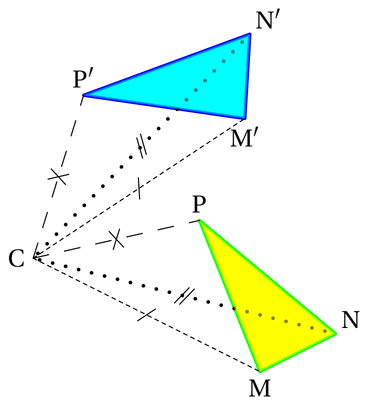
Mathémator : Restons-en là pour l'instant. D'autres isométries ?

Téhessin : Les rotations :

Définition 5

La **rotation** de centre C et d'angle α est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M′ tel que

- ▷ si $M \neq M'$, alors $CM = CM'$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$
- ▷ si $M = C$, alors $M' = C$



Je suppose que vous voulez prouver que les rotations sont des isométries...ici, j'ai plus de mal...j'aurais besoin de la conservation des angles par une isométrie...

Mathémator : ...sauf qu'on veut prouver que les rotations sont effectivement des isométries. Je vais vous aider

$$\left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CP'}\right) = \left(\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CM}\right) + \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}\right) + \left(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}\right) = -\alpha + \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}\right) + \alpha + 2k\pi = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui prouve que les *rotations* conservent les angles et vous pouvez continuer...

Téhessin : ...donc les triangles CMP et CM′P′ ayant des angles deux à deux de même mesure sont semblables[d], or $CM = CM'$ et $CP = CP'$, donc ces triangles sont isométriques, donc $MP = M'P'$ et les rotations sont des isométries.

Mathémator : Comme quoi la géométrie en seconde sert quand même à quelque chose.
Bon, il nous reste les symétries axiales qu'on appellera plutôt réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

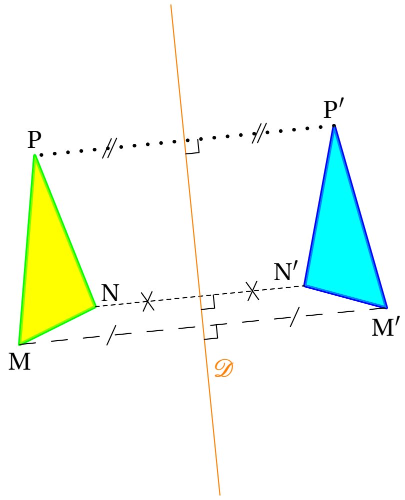
Téhessin : Ça, c'est du cours de sixième

[d] Tiens, tiens...

Définition 6
La **réflexion** d'axe $\mathscr{D}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M′ tel que

- ⊳ si $M \notin \mathscr{D}$, $\mathscr{D}$ est la médiatrice de $[MM']$
- ⊳ si $M \in \mathscr{D}$, $M = M'$

et la petite figure



Mathémator : Et la démonstration utilise des triangles isocèles, des triangles isométriques et semblables : je vous laisse vous en occuper.
Nous avons trouvé *des* similitudes, mais le problème, maintenant, est de savoir s'il existe d'autres similitudes et de les déterminer. Pour nous simplifier la vie, nous allons utiliser un outil encore tout frais ...

IV - Forme complexe des similitudes

Mathémator : Rappelez-vous de notre petite discussion sur la conservation des angles orientés page 3 : nous avions distingué deux familles de similitudes.

Téhessin : Les directes et les indirectes selon qu'elles conservent ou non l'orientation.

Mathémator : Bien. Étudions séparément ces deux cas.

a. Forme complexe d'une similitude directe

Mathémator : Nous sommes donc dans le cas $Z = Z'$. Nous allons reprendre les formules utilisées précédemment en choisissant $p = z$, $n = 1$ et $m = 0$. Qu'obtenons-nous ?

Téhessin : $Z' = \dfrac{z' - m'}{n' - m'} = Z = \dfrac{z - 0}{1 - 0} = z$. Oui, et alors ?

Mathémator : N'oubliez pas que nous cherchons une expression complexe d'une transformation du plan, donc une relation de la forme $z' = f(z)$.

Téhessin : Bon, alors $z' - m' = z(n' - m')$ i.e. $z' = (n' - m')z + m'$, mais je ne vois pas l'intérêt puisqu'on ne connaît ni m', ni n'. On tourne un peu en rond.

Mathémator : Détrompez-vous ! Nous venons de montrer que si s est une similitude directe, alors *nécessairement* sa forme complexe doit être du style $z \mapsto az + b$ avec a et b des nombres complexes, a étant non nul. D'ailleurs, pourquoi $a \neq 0$?

Téhessin : Ben, a c'est $n' - m'$, donc il faudrait que $n' \neq m'$, mais on n'en sait rien a priori, ça dépend de s.

Mathémator : Eh non ! Une similitude est une transformation, donc puisque n, qui vaut 1, et m, qui vaut 0, sont distincts, leurs images le seront aussi.
Il reste un problème : est-ce que toutes les transformations du type $z \mapsto az+b$ sont des similitudes directes ? Cela revient à montrer qu'une telle transformation conserve les rapports de distance et les angles orientés : à vous de jouer, Téhessin, en ayant bien à l'esprit que nous travaillons avec des nombres complexes.

Théorème 2
Les similitudes directes sont LES transformations d'écriture complexe

$$z \mapsto az + b$$

avec a et b des complexes, a étant non nul.

b. Forme complexe d'une similitude indirecte

Mathémator : On procède comme précédemment, mais maintenant $\mathrm{Z} = \overline{\mathrm{Z}}$. Je vous laisse montrer que

Théorème 3
Les similitudes indirectes sont LES transformations d'écriture complexe

$$z \mapsto a\overline{z} + b$$

avec a et b des complexes, a étant non nul.

c. Rapport d'une similitude

Mathémator : La forme complexe d'une similitude étant donnée, comment déterminer le rapport de la similitude ?

Téhessin : Je considère deux points M et P et leurs images M′ et P′ et je calcule M′P′/MP

$$\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{MP}} = \left|\frac{p'-m'}{p-m}\right| = \left|\frac{ap+b-am-b}{p-m}\right| = \left|\frac{a(p-m)}{p-m}\right| = |a|$$

Mathémator : Je suis d'accord, sauf que vous n'avez réglé le cas que des similitudes directes.

Téhessin : Désolé, c'est encore si frais dans mon esprit

$$\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{MP}} = \left|\frac{p'-m'}{p-m}\right| = \left|\frac{a\overline{p}+b-a\overline{m}-b}{p-m}\right| = \left|\frac{a(\overline{p}-\overline{m})}{p-m}\right| = |a|\,\frac{|\overline{p-m}|}{|p-m|} = |a|$$

Donc ça marche encore et j'énonce moi-même la propriété

Propriété3
Une similitude d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$ admet pour rapport $|a|$

Mathémator : Et notez au passage

Propriété4
Les isométries sont les similitudes de rapport 1

d. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Mathémator : Avant d'aller plus loin, nous allons avoir besoin d'un petit outil technique. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \imath \sin x$. C'est une fonction un peu spéciale puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Que vaut $f(0)$?

Téhessin : $f(0) = \cos 0 + \imath \sin 0 = 1$: jusqu'ici, tout va bien.

Mathémator : Je vous demande à présent un petit effort d'imagination : on peut supposer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en considérant i comme un coefficient quelconque et en extrapolant les formules de dérivations des fonctions à valeurs réelles. Qu'est-ce que ça peut donner ?

Téhessin : $f'(x) = -\sin x + \imath\cos x$
Mathémator : Essayez alors de faire le lien avec $f(x)$.
Téhessin : $f'(x) = \imath(\imath\sin x + \cos x) = \imath f(x)$: oui, et alors ?
Mathémator : Récapitulons : f vérifie $f' = \imath f$ avec $f(0) = 1$. Ça ne vous rappelle rien ?
Téhessin : Ciel ! Ma fonction exponentielle ! On avait $f' = kf$ et $f(0) = 1$ alors on en concluait que $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
Mathémator : Donc vous ne serez pas choqué si nous écrivons, par convention d'écriture à notre niveau, que $f(x) = \exp(\imath x) = \mathrm{e}^{\imath x}$.

Notation exponentielle
On convient d'écrire, pour tout réel x

$$\mathrm{e}^{\imath x} = \cos x + \imath\sin x$$

Notez au passage que les formules d'additions sont alors plus faciles à retrouver. En effet, $\mathrm{e}^{\imath(a+b)} = \mathrm{e}^{\imath a}\mathrm{e}^{\imath b}$, donc

$$\cos(a+b) + \imath\sin(a+b) = (\cos a + \imath\sin a)(\cos b + \imath\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + \imath(\cos a\sin b + \cos b\sin a)$$

Alors, par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$$

Voici une illustration du côté extrêmement pratique de l'outil complexe.

V - Écriture complexe des transformations usuelles

a. Translations

Mathémator : Considérons la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe b et les habituels points M et M$'$ d'affixes z et z'. Par définition, on a $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{v}$. Traduisez ceci à l'aide de l'outil complexe.
Téhessin : Facile : $z_{\overrightarrow{\mathrm{MM}'}} = z' - z = b$, i.e. $z' = z + b$. Impeccable, car on retrouve une expression du type $az + b$, donc c'est bien une similitude directe de rapport $|a| = |1| = 1$, donc une isométrie : c'est sûr que ça commence à me plaire de travailler avec les complexes.
Mathémator : J'espère que vous n'êtes pas ironique. Notons ce résultat au passage

Propriété5
La transformation complexe définie par

$$z \mapsto z + b$$

est la translation de vecteur d'affixe b

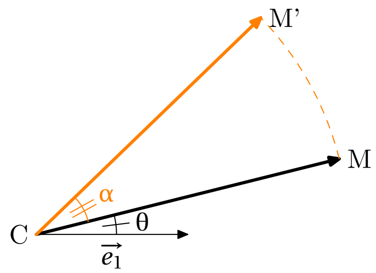
b. Rotations

Mathémator : Essayez de vous débrouiller avec la rotation de centre C d'affixe c et d'angle de mesure α.
Téhessin : Bon, on sait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}'}\right) = \alpha = \arg\dfrac{z'-c}{z-c}$ et CM$'$ = CM, donc $\dfrac{\mathrm{CM}'}{\mathrm{CM}} = 1 = \left|\dfrac{z'-c}{z-c}\right|$. Donc $(z'-c)/(z-c)$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument de mesure α. On peut à la rigueur écrire $(z'-c)/(z-c) = \cos\alpha + \imath\sin\alpha$. Tout ceci ne nous mène pas à grand chose.
Mathémator : Au contraire ! Mais avant tout, vous avez un CM au dénominateur, il faut donc s'assurer qu'il est non nul, donc que M $\neq$ C. On verra ensuite si on rattraper le coup. Pour ce qui est de l'interprétation, nous pouvons utiliser un outil tout juste découvert quelques lignes plus haut : un complexe de module 1 et de mesure congrue à α modulo 2π s'écrit $\mathrm{e}^{\imath\alpha}$.
Ainsi $(z'-c) = \mathrm{e}^{\imath\alpha}(z-c)$. Vous remarquerez que cette formulation reste valable si $z = c$: en effet, $c' = c$ car le centre de la rotation est invariant.
Téhessin (à part) : *Là, je vais lui clouer le bec...**(tout haut)*** Et je suppose qu'on vérifie que, réciproquement, toutes les transformations de ce style sont des rotations d'angle α. Finalement, toute rotation s'exprime sous la forme $z' = z\mathrm{e}^{\imath\alpha} + b$.

Mathémator : Justement non, et c'est pourquoi ces vérifications ne sont pas anodines : en effet, si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, nous sommes bien embêtés car nous obtenons une translation de vecteur d'affixe b.

Propriété6
La transformation complexe définie par
$$z \mapsto ze^{i\alpha} + b$$
est une rotation d'angle α avec $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$

En fait, ça se comprend. Notons $z - c = re^{\imath\theta}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, alors $z' - c = re^{\imath\theta}e^{\imath\alpha} = re^{\imath(\alpha+\theta)}$, ce qui peut se traduire par : « on garde la même distance, on tourne de α »



c. Homothéties

Mathémator : Pas grand chose à dire ici. Avec les notations habituelles, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{CM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, d'où $z' - c = k(z - c)$, i.e. $z' = kz + c(1-k)$. Ainsi une homothétie a une représentation complexe de la forme $z \mapsto kz + b$.

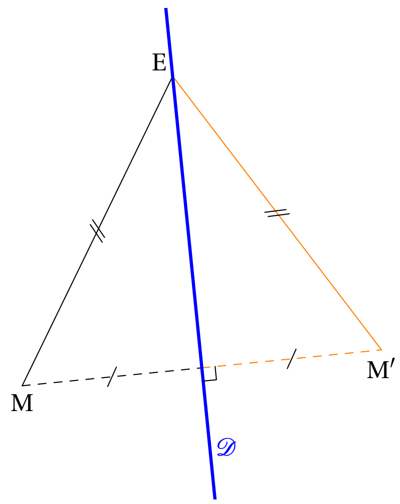
Téhessin (à part) : *Soyons prudent...**(tout haut)** Il faut faire attention : on ne doit pas avoir $z = z + b$ qui nous fait retomber sur une translation, donc k doit être différent de 1.*

Mathémator : Vous progressez, mon brave Téhessin. Pour éviter toute confusion, nous prendrons l'habitude de commencer notre étude par la recherche des points invariants : c'est ce que nous verrons un peu plus loin dans notre étude générale des similitudes.

Propriété7
La transformation complexe définie par
$$z \mapsto kz + b \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$
est une homothétie de rapport k

d. Réflexions

Mathémator : Les réflexions sont plus difficilement exploitables vectoriellement, donc aussi à la sauce complexe. Observons malgré tout le dessin suivant



On remarque que $\left(\overrightarrow{\mathrm{EI}}, \overrightarrow{\mathrm{EM'}}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{EI}}, \overrightarrow{\mathrm{EM}}\right)$. Ainsi une réflexion ne conserve pas les angles orientés et s'écrit donc sous forme complexe $z \mapsto a\overline{z} + b$. Mais toute transformation de ce style n'est pas une réflexion. Nous le prouverons bientôt.

VI - Compositions de transformations

a. Composition de deux similitudes

Mathémator : Nous pouvons prouver de deux manières au moins que la composée de deux similitudes est encore une similitude. Tout d'abord en utilisant le moins d'outils, i.e. en n'utilisant que la définition et la première propriété pour parler du rapport.

Considérez donc deux points M, P et deux similitudes s et s' de rapports k et k'. Montrez que $s \circ s'$ est encore une similitude et trouvez le rapport de cette similitude.

Téhessin : Il faudrait montrer que le rapport $\dfrac{s \circ s'(\mathrm{M}) s \circ s'(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}$ est constant. Help !

Mathémator : Que pensez-vous de $\dfrac{s\big(s'(\mathrm{M})\big) s\big(s'(\mathrm{P})\big)}{s'(\mathrm{M}) s'(\mathrm{P})}$?

Téhessin : Comme s est une similitude de rapport k, et bien ça vaut k. Mais ce n'est pas le bon dénominateur !

Mathémator : Encore une fois, quand vous n'avez pas ce que vous voulez, faîtes-le apparaître !

Téhessin : Je veux $\dfrac{s\big(s'(\mathrm{M})\big) s\big(s'(\mathrm{P})\big)}{\mathrm{MP}} = \dfrac{s\big(s'(\mathrm{M})\big) s\big(s'(\mathrm{P})\big)}{s'(\mathrm{M}) s'(\mathrm{P})} \times \dfrac{s'(\mathrm{M}) s'(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}$ C'est magique, on obtient que la rapport fait toujours kk', donc ça marche !

Mathémator : C'est beau cette rusticité des moyens utilisés. Sinon, vous pouvez toujours opter pour l'outil complexe : on pose $s(z) = az + b$ et $s'(z) = a'z + b'$.

Téhessin : En faisant ça, vous éliminez les similitudes indirectes.

Mathémator : Bien joué ! Il faudra donc traiter vous-même les autres cas. En attendant, occupons-nous de ce cas-ci.

Téhessin : $s(s'(z)) = a'(az + b) + b' = aa'z + a'b + b'$, donc c'est une similitude de rapport $|aa'|$.

Mathémator : C'est à dire de rapport $|a| \times |a'|$, donc on retombe sur nos pattes.

> **Propriété8**
> La composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k' est une similitude de rapport kk'

b. Réciproque

Mathémator : Lâchons un instant nos similitudes et retournons sur les bancs du collège : vous avez découvert en 4ème l'inverse d'un nombre x non nul : on vous l'a défini comme l'unique nombre x^{-1} tel que $x \times x^{-1} = 1$.
Cette année, nous avons parlé de fonctions réciproques, notamment au moment d'introduire la fonction logarithme. Nous avions dit qu'une fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle I si set seulement si $f \circ f^{-1}(x) = x$ pour tout élément x de I.
Essayons d'élargir le débat grâce au petit aparté suivant

> **Structure de groupe multiplicatif**
> Soit G un ensemble non vide et muni d'une loi de composition interne (i.e. le produit de deux éléments de G est encore dans G) associative (i.e. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) notée $\cdot$.
> On dit que $(\mathrm{G}, \cdot)$ est un groupe lorsque
>
> - la loi admet un élément neutre e (i.e. $a \cdot e = e \cdot a = a$ pour tout $a \in \mathrm{G}$)
> - tout élément a de G admet un symétrique noté a^{-1} (i.e. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$)
>
> Par exemple, $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe, $(\mathbb{Z}, +)$ aussi. Trouvez ainsi d'autres exemples de groupes qui ne soient pas forcément des ensembles de nombres.

L'idée est maintenant de vérifier si des fois, par le plus grand des hasards, l'ensemble des similitudes du plan muni de la composition des transformations ne serait pas un groupe.

Téhessin : Appelons $\mathscr{S}$ l'ensemble des similitudes du plan. Si j'ai bien compris, il faut commencer par vérifier que $\mathscr{S}$ est non vide : il contient les translations, les homothéties et tout le bataclan, donc pas de problème.

Il faut maintenant vérifier que la composition des similitudes est une loi de composition interne : pas de problème, nous venons de le voir au paragraphe précédent.
La composition des transformations est associative de manière évidente.
Maintenant, il s'agit de trouver un élément neutre. Par exemple la translation de vecteur nul.

Mathémator : Où une rotation d'angle nul, où une homothétie de rapport 1 : en fait, toutes ces transformations sont une seule et même transformation qu'on appellera *identité* et qu'on notera $\mathscr{I}d$ et qui envoie tout point sur lui-même.

Téhessin : Soit ! Il ne reste plus qu'à trouver un symétrique pour chacun. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, si $s \circ s' = \mathscr{I}d$, alors $kk' = 1$, donc il suffit de prendre $k' = 1/k$.

Mathémator : Mouais, enfin faites tout de même attention. Si je m'en tiens à ce que vous venez d'énoncer, je pourrais être tenté de dire qu'une similitude de rapport k étant donnée, il suffit de trouver une similitude de rapport $1/k$ et le tour est joué. Or considérons une rotation et une réflexion non triviales : leurs rapports valent tous deux 1, donc leur produit vaut 1 aussi, donc elles sont réciproques l'une de l'autre, ce qui n'est pas vraiment le cas.
Mieux vaut énoncer votre résultat sous cette forme : « la transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$ », mais il reste à prouver *l'existence* d'une telle transformation. Tentez votre chance avec l'expression complexe.

Téhessin : Si s est une similitude directe, avec les notations habituelles $z' = az + b$. Il faut chercher une éventuelle réciproque vérifiant $z' = (1/a)z + \beta$ d'après ce que nous venons de voir. Appelons z'' l'affixe du point $s \circ \sigma(\mathrm{M})$, alors $z'' = a((1/a)z + b) + \beta = z + ab + \beta$: il suffit donc de choisir $\beta = -ab$ et le tour est joué.

Mathémator : Il reste quand même à vérifier que ça marche encore dans le sens $\sigma \circ s$ et aussi pour les similitudes indirectes : je vous laisse le faire. Maintenant nous pouvons écrire

Propriété9
Toute similitude de rapport k admet une transformation réciproque qui est une similitude de rapport $1/k$

À titre d'exercice, je vous laisse déterminer les réciproques des similitudes usuelles. pour l'heure, ces petites considérations nous permettent à présent d'énoncer un théorème fort intéressant :

Théorème 4
Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie

Ce résultat, extraordinaire s'il en est, va nous permettre de voir un peu plus clair dans cet amas de transformations jusqu'ici mystérieux. Il reste un détail : la preuve de ce théorème.
Un petit Joker pour vous mettre sur la piste : avec des notations évidentes, $h \circ i$ est bien une similitude comme composée de similitudes.
Éliminons h pour savoir qui est i :

$$h^{-1} \circ h \circ i = i = h^{-1} \circ s$$

Si s est une similitude quelconque de rapport k, pour que $h^{-1} \circ s$ soit une isométrie, il faut que le rapport de h^{-1} soit $1/k$, donc le rapport de h vaut k.
Voilà pour l'analyse : si s est la composée d'une homothétie et d'une isométrie, alors le rapport de l'homothétie est égal au rapport de la similitude.

Prenons maintenant le problème par le bon bout : on part d'une similitude quelconque de rapport k. Composons-la avec une homothétie H de rapport $1/k$, alors $f = \mathrm{H} \circ s$ est une similitude de rapport $k \times 1/k = 1$, donc c'est une isométrie.
Ainsi, s s'écrit sous la forme $s = \mathrm{H}^{-1} \circ f$ et le tour est joué.

Bien, le cours grossit et nous avons toujours aussi peu d'exercices à nous mettre sous la dent. Pour essayer d'abréger un peu, nous allons étudier plus spécifiquement, comme nous le demande le programme, les similitudes directes.

VII - Classification des similitudes directes

a. Points fixes

Mathémator : Notre outil principal pour étudier une similitude va être la recherche des POINTS FIXES. Un point M est dit fixe s'il est égal à son image, c'est à dire si $z = z' = az + b$. Cette équation a-t-elle toujours des solutions ?

Téhessin : $az + b = z \iff z(1 - a) = b \iff z = b/(1 - a)$: il y a toujours un point fixe qui est d'affixe $b/(1 - a)$.

Mathémator : Mon petit Théhessin, vous avez des problèmes en ce moment, votre petite amie vous tourmente l'esprit, dites-moi tout.

Téhessin : Qu'est-ce qui vous prend ?!?

Mathémator : Il me prend, bougre de triple âne borgne élevé au jus de moule, qu'en terminale on se pose des questions avant d'invoquer l'inverse de $1-a$!

Téhessin : Tout doux mon bon maître, j'avais, il est vrai, l'esprit ailleurs. Il faut en effet commencer par étudier le cas $a=1$, alors $z'=z+b$. Nous sommes alors en présence soit de l'identité si b est nul, et alors tout point du plan est fixe, soit d'une translation non triviale et alors aucun point n'est fixe.

Mathémator : Bon, je passerai l'éponge sur votre petit oubli de tout à l'heure et je vais traiter l'autre cas pour être sûr de garder mon calme.
Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = b/(1-a)$...

Téhessin : ... qui existe car a est différent de 1.

Mathémator : C'est bon, c'est bon, faut pas non plus en faire des tonnes. De $z'=az+b$ et $\omega = a\omega+b$, on tire $z'-\omega = a(z-\omega)$. Soit $ke^{i\theta}$ la forme exponentielle de a. Nous obtenons

$$(z'-\omega) = k\times e^{i\theta}(z-\omega)$$

Que reconnaissez-vous ?

Téhessin : Élémentaire, ô lumière au bout de mon tunnel. Je vois que la similitude s est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle θ avec l'homothétie de même centre et de rapport k.

Mathémator : J'aime pas les fayots

Théorème 5

Soit s une similitude directe d'écriture complexe $z'=az+b$, alors

- ▷ si $a=1$, s est la translation de vecteur d'affixe b (éventuellement nul)
- ▷ sinon, s est la composée, dans un ordre quelconque
  - de l'homothétie de centre le point fixe et de rapport $|a|=k$
  - de la rotation de même centre et d'angle $\theta = \arg(a)[2_p i]$

  L'écriture complexe est alors $z'-\omega = ke^{i\theta}(z-\omega)$, avec ω l'affixe du point fixe.

Mais ce n'est pas tout :

Classification des similitudes directes selon les points fixes

Soit s une similitude directe du plan

- ▷ si s n'admet pas de point fixe, alors c'est une translation
- ▷ si s admet au moins deux points fixes, alors c'est l'identité
- ▷ si s admet un unique point fixe, alors c'est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre le point fixe

b. Similitudes directes et couples de points

Mathémator : Nouveau problème qui va souvent se présenter à vos yeux ébaubis : on considère quatre points M, N, M′ et N′ tels que $\mathrm{M}\neq\mathrm{N}$ et $\mathrm{M'}\neq\mathrm{N'}$: existe-t-il une similitude directe transformant M en M′ et N en N′ ?
Puisque je ne vous ai pas fait de cadeau de Noël cette année, voici un petit coup de pouce : utilisez les expressions complexes.

Téhessin : Oh merci Phare de la connaissance universelle, vous êtes trop bon.
Avec des notations évidentes, je suppose qu'il s'agit de trouver un couple de complexes (a,b) tels que $m'=am+b$ et $n'=an+b$.
Merci du cadeau, mais je ne vois pas trop ce que je peux faire de ça.

Mathémator : Voyons : deux inconnues, deux équations, ça ne vous dit rien ?

Téhessin : Bon sang, mais c'est bien sûr : on résout un système d'inconnues a et b

$$\left\{\begin{array}{rcl} am+b &=& m' \\ an+b &=& n' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} a(m-n)=m'-n' \\ b=m'-am \end{array}\right.$$

Or, je précise bien que $m \neq n$, donc j'obtiens finalement

$$a = \frac{m' - n'}{m - n} \qquad b = m' - a\frac{m' - n'}{m - n}$$

Mathémator : Et vous vous rendez compte que vous avez brillamment obtenu que non seulement une telle similitude existe, mais qu'en plus elle est tunique.

Théorème 6

Étant donnés quatre points M, N, M′ et N′ tels que M ≠ N et M′ ≠ N′, il existe une unique similitude transformant M en M′ et N en N′

Téhessin : En fait, on n'a pas besoin que M′ et N′ soient distincts : on ne risque la division par zéro (j'ai bien retenu la leçon) que si M = N.

Mathémator : Certes, mais si $m' = n'$, alors $a = 0$ et on peut dire au revoir à notre similitude.
Ce théorème nous aidera dans le cadre d'une résolution purement géométrique, et dans le cas d'une résolution algébrique, sa démonstration nous indique un moyen de déterminer explicitement la similitude.

Il ne nous reste plus qu'à voir des propriétés que vous avez admises intuitivement depuis des années.

c. Effet des similitudes sur les droites, cercles e tutti quanti

Mathémator : Les propriétés déjà connues des similitudes doivent vous permettre de conclure rapidement, en commençant par exemple par les cercles.

Téhessin : Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance R de O, donc
$\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}) \iff \mathrm{OM} = \mathrm{R}$ or, avec les notations habituelles, $\mathrm{O'M'} = k\mathrm{OM}$, dès lors

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}) \iff \mathrm{OM} = \mathrm{R} \iff \mathrm{O'M'} = k\mathrm{R} \iff \mathrm{M'} \in \mathscr{C}(\mathrm{O'},\mathrm{R'})$$

Mathémator : Bien joué ! L'image d'un cercle par une similitude est donc un cercle de centre, l'image du centre et de rayon k fois le rayon initial.

L'autre grand renseignement concerne la conservation des angles. Comment caractériseriez-vous des points alignés à l'aide d'angles.

Téhessin : Disons que A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv 0[\pi]$

Mathémator : Parfait ! Toujours avec les notations habituelles, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right)[\pi]$, donc

$$\text{A, B et C alignés} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv 0[\pi] \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}\right) \equiv 0[\pi] \iff \text{A}', \text{B}' \text{ et C}' \text{ alignés}$$

Conclusion ?

Téhessin : L'image d'une droite par une similitude est une droite.

Mathémator : Remarquez que nous n'avons toujours pas précisé si la similitude est directe ou non.

Pour terminer, un morceau de choix : la conservation des barycentres, si chers à votre cœur depuis l'année dernière.
Rappelons la propriété caractéristique en l'adaptant à la sauce complexe

Propriété caractéristique des barycentres

Le point G est barycentre du système $(\mathrm{A}_i,\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si et seulement si

- ▷ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$
- ▷ $z_{\mathrm{G}} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_{\mathrm{A}_i}}{\displaystyle\sum_{i=1} n\alpha_i}$

Je vous laisse alors vérifier à l'aide de l'expression complexe des similitudes que ces dernières conservent les barycentres, ce qui nous permettra de parler de l'image de segments, de triangles, etc.

VIII - Similitudes indirectes

a. Règle des signes

Mathémator : Souvenez-vous : + par + donne +, + par - donne -, croissante ∘ décroissante donne décroissante...

Téhessin : Et c'est pareil pour la composée des similitudes :
– directe ∘ directe ⟶ directe
– indirecte ∘ indirecte ⟶ directe
– indirecte ∘ directe ⟶ indirecte

Mathémator : Quel esprit de synthèse ! Il suffit en effet de penser à la conservation des angles orientés.

b. Classification des similitudes indirectes

Mathémator : Une nouvelle mission : reprenez tout ce que nous avons fait concernant les similitudes directes et adaptez les résultats au similitudes indirectes. Je vous livre pour vous rassurer la conclusion

Classification des similitudes indirectes selon les points fixes

Soit s une similitude indirecte du plan

- ▷ si s n'admet pas de point fixe, alors c'est une symétrie glissée, i.e. la composée d'une réflexion et d'une translation
- ▷ si s admet au moins deux points fixes, alors c'est une réflexion d'axe l'ensemble des invariants
- ▷ si s admet un unique point fixe, alors c'est la composée d'une symétrie axiale ou glissée et d'une homothétie de centre le point fixe

c. Décomposition d'une similitude indirecte

Téhessin : Pourquoi traitez-vous les similitudes indirectes de façon si cavalière ? Un petit paragraphe et puis s'en va...

Mathémator : La raison tient dans ce théorème

Théorème 7

Toute similitude indirecte s s'écrit sous la forme $s = \sigma \circ r$ où σ est une *similitude directe* et r une *reflexion*

Considérez deux points A et B et leurs images A′ et B′ par s. Le théorème 6 page 13 nous assure l'existence d'une similitude directe σ qui transforme A en A′ et B en B′.
Étudions maintenant la similitude (comme composée de deux similitudes) $\sigma^{-1} \circ s$. C'est une similitude indirecte. Pourquoi ?

Téhessin : Car c'est la composée d'une similitude directe et d'une indirecte.

Mathémator : Vous ne dormez donc pas... Alors vous allez pouvoir déterminer les images de A et B par $\sigma^{-1} \circ s$.

Téhessin : Bien sûr ! $\sigma^{-1} \circ s(\mathrm{A}) = \sigma^{-1}(s(\mathrm{A})) = \sigma^{-1}(\mathrm{A}') = \sigma^{-1}(\sigma(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$, et pareil pour B. Oui, et alors ? Deux points ne suffisent pas à généraliser, vous me l'avez dit assez de fois !

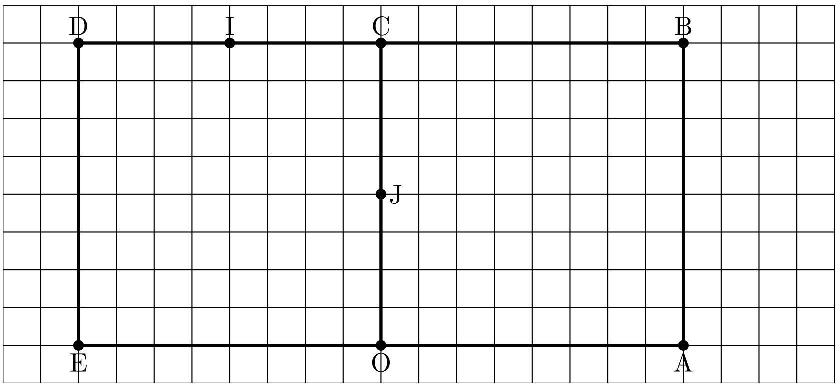
Mathémator : Oui mais ici, cela nous permet de dire que la similitude indirecte $\sigma^{-1} \circ s$ a deux points invariants A et B. Donc, d'après la classification page 14, $\sigma^{-1} \circ s$ est une reflexion d'axe (AB). Notons la r. Alors $\sigma^{-1} \circ s = r$, c'est à dire $s = \sigma \circ r$ et le tour est joué.

IX - Au Bac

Exercice 1 Exercice géométrique

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés OABC et OCDE tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}.$$



On désigne par I le milieu du segment [CD], par J le milieu du segment [OC] et par H le point d'intersection des segments [AD] et [IE].

1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.
On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s.
  a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE].
  b) Montrer que Ω ne peut être le point H.
  c) Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.
  a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.
  b) En déduire l'affixe du centre Ω de s.

Exercice 2 Composées et complexes

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe $z'=-2\mathrm{i}\overline{z}+6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.

2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.
On pose $g = f \circ h$.

a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) On désigne par M″ l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -\mathrm{i}\overline{z} + 2 + 2\mathrm{i}$ où z'' est l'affixe de M″.

c) Montrer qu'il existe sur l'axe $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{v}\right)$ un unique point invariant par g ; on le note L.
Reconnaître alors la transformation g.

d) En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.

3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

Exercice 3 Géométrie puis complexes

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A *on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie* B *on utilisera les nombres complexes.*

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).

a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\mathrm{A} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.

2. Calculer l'affixe du point Ω.

3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$. Placer le point E sur la figure.

Exercice 4 Avec des suites

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{A}_{n+1} = f(\mathrm{A}_n)$.

a) Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega\mathrm{A}_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

c) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon $0,1$?

3. a) Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 5 QCM

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$. C : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.

B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$. D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

2. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.
A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].
C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 6 Similitudes et arithmétique

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = \mathrm{i}, \qquad b = 1 + 2\mathrm{i}, \qquad c = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et} \quad d = 3 + 2\mathrm{i}.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M′, d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel $n, U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$,

$$U_n = U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}.$$

La notation pgcd$(a\ ;\ b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b.
Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité

$$\operatorname{pgcd}\left(U_n, U_p\right) = \operatorname{pgcd}\left(U_p, U_{n-p}\right).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\text{pgcd}\left(\text{U}_n,\ \text{U}_p\right) = \text{U}_{\text{pgcd}(n\ ;\ p)}.$$

Déterminer le nombre : $\text{pgcd}(\text{U}_{2005},\ \text{U}_{15})$.

Exercice 7 Similitude indirecte

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_\text{I} = 1\ ,\ z_\text{J} = \text{i}\ ,\ z_\text{H} = 1 + \text{i}\ ,\ z_\text{A} = 2\ ,\ z_\text{B} = \frac{3}{2} + \text{i}\ ,\ z_\text{C} = 2\text{i} \text{ et } z_\text{D} = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_\text{F} = -1 + \frac{1}{2}\text{i}$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -\text{i}\overline{z} + 2\text{i}.$$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2. a) Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.

a) Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}$.

b) Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

c) En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice 8 Similitude indirecte

La figure sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6\text{i}$, $-7-2\text{i}$ et $3-2\text{i}$. On admet que le point F, d'affixe $-2+\text{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

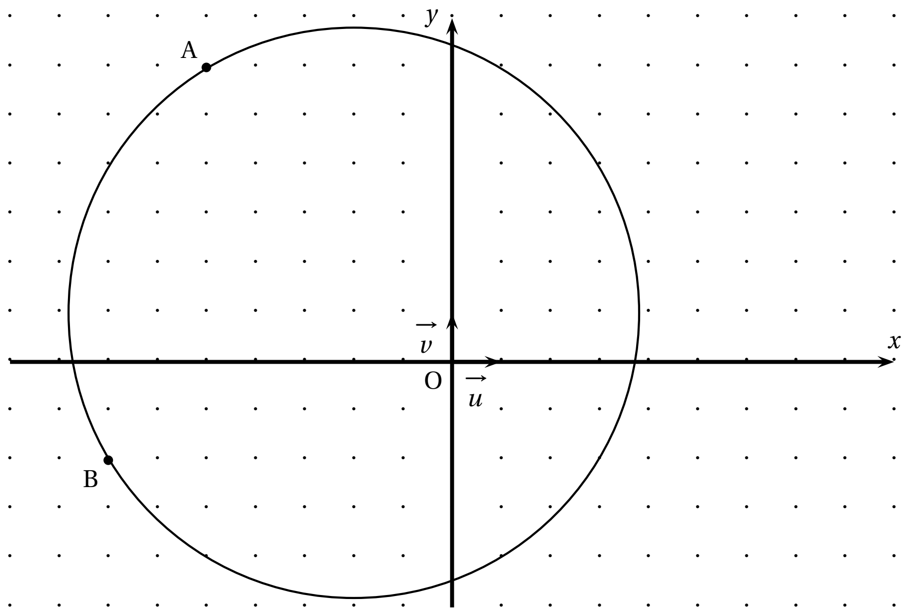
1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2. a) Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.
Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ qui, au point M, associe le point M′.
Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

b) En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c) Vérifier que le point E est ùn point du cercle Γ.

3. Soit I le milieu du segment [AC].
Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.
Démontrer que les points H, G et F sont alignés.



Exercice 9 Avec de l'arithmétique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = -4+2i$ et $c = 1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.
b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M′ l' image de M par f.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x+3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Vérifier que le couple $(-4 ; 2)$ est une solution de (E).
b) Résoudre l'équation (E).
c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5 ; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

Exercice 10 Composition de similitudes

$\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).
On considère le point A d'affixe $z_A = 1+i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(O\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.
On pose $s = h \circ S_1$.
Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. a) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.
   b) Montrer que $z_B = -3\mathrm{i}z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
5. Soient M le milieu de [AB] et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de [BC].
2. a) Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
   b) Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).
   c) Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

Exercice 11 Avec et sans complexe...

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.
I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.
   c) Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Q par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A′ et B′ les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.
   a) Démontrer que les points A′ et B′ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathscr{D}$.
   b) Vérifier que $s(B') = A'$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[A'B'\right]$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes
OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directè telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.
   a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)
   En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par $\mathscr{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).
   On note A′ et B′ les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathscr{D}$.
   a) Déterminer les images des droites (BB′) et $\mathscr{D}$ par la similitude s.
   b) Déterminer le point $s(B')$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′]

Exercice 12 ROC et décomposition de similitudes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonorinal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances
On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.
Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f
Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

III. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$.
Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathscr{D}$, le point $f(\mathrm{N})$ appartient aussi à $\mathscr{D}$.

3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a) Donner l'écriture complexe de σ.
(Indication : on pourra poser $z' = a\mathrm{i} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)

b) En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c) Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,