Chapitre 4

PROBABILITÉS

I - Quelques exemples pour explorer

a. Une activité de CE1

Pour la fête de l'école, les élèves de CE$_2$ ont préparé une danse qui s'exécute par couples : un garçon, une fille. La maîtresse doit faire des essais pour trouver les couples qui s'accordent le mieux, en appelant d'abord le garçon puis la fille.
Voici l'ensemble des garçons G = {Alain ; Bernard ; Pierre }
Voici l'ensemble des filles F = { Lise ; Renée ; Catherine ; Denise }
En mathématiques, nous aurons souvent à écrire des couples, appelés aussi 2-listes. Pour cela, nous utiliserons toujours la même écriture ; par exemple, le couple formé du garçon « Alain » et de la fille « Renée » sera écrit : **(Alain , Renée)**. Dans ce couple, « Alain » est le premier terme et « Renée » le deuxième terme. L'ordre des termes est important.
Citons le plus possible de couples. Nous en avons trouvé beaucoup ; le travail devient difficile : il faut vérifier pour chaque couple nouveau qu'il n'a pas été cité ; sommes-nous sûr(e)s de ne pas en avoir oublié ?
Il existe un moyen très facile qui nous permettra d'écrire tous les couples : un **arbre**. Les trois premières branches représentent chacune un garçon. De l'extrémité de chacune de ces branches partent quatre branches représentant chacune une fille. À chaque extrémité de ces dernières branches nous pouvons écrire un couple.

Il y a donc 3 × 4 couples distincts : 3 possibilités pour le garçon × 4 possibilités pour la fille.

b. Description statistique

Une enquête est effectuée auprès des 100 élèves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des élèves.
On a obtenu le tableau suivant

travail / sexe	< 5 minutes	$\geqslant 5$ minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons. Alors on notera $\overline{\mathrm{T}}$ le complémentaire de T dans la population totale du lycée, et $\overline{\mathrm{G}}$ celui de G, c'est à dire l'ensemble des filles.
Alors on peut construire le tableau des fréquences correspondant

travail / sexe	$\overline{\mathrm{T}}$	T	fréquence par sexe
$\overline{\mathrm{G}}$	20%	15%	35%
G	60%	5%	65%
fréquence par temps de travail	80%	20%	100%

c. Découvrons sur un exemple le vocabulaire des probabilités

Une situation probabiliste n'existe que s'il y a une expérience (à issue) aléatoire. Il faut pour cela introduire par exemple l'expérience habituelle « on prélève au hasard un élève du lycée syldave ». L'ensemble des issues de cette expérience est appelé mathématiquement l'**univers**, souvent noté Ω : c'est ici l'ensemble des 100 élèves du lycée.
Les parties T et G de Ω sont des **événements** qui seront décrits à l'aide de phrase entre guillemets. Par exemple, G est l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».
On suppose les élèves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat : cette condition assure l'**équiprobabilité** vue en Première.
Ainsi, la probabilité que l'élève prélevé travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(\mathrm{T}) = \dfrac{20}{100}$, la probabilité pour que ce soit un garçon vaut $\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \dfrac{65}{100}$ et la probabilité pour que l'élève prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes vaut $\mathbb{P}(\mathrm{G} \cap \mathrm{T}) = \dfrac{5}{100}$
Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard. L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
La probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes vaut $\dfrac{5}{65} = \dfrac{1}{13}$.

II - Des définitions et des théorèmes

Nous ne préciserons pas plus, à notre niveau, les notions d'expérience et d'issue introduites dans l'exemple précédent.

a. Notion d'événement

On considère une épreuve aléatoire. Un événement est en quelque sorte une condition dont on peut dire après l'expérience, si elle est réalisée ou non. Par exemple, précédemment, on a considéré l'événement « l'élève syldave prélevé est un garçon ».
En fait

Définition 4.1
Un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω

Il existe des événements un peu particuliers.

Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A est l'ensemble des issues qui ne sont pas dans A. On le note souvent $\overline{\mathrm{A}}$.
Ainsi, si l'on reprend l'événement G « l'élève syldave prélevé est un garçon », alors $\overline{\mathrm{G}}$ sera « l'élève prélevé n'est pas un garçon[a] »

Événement impossible

Cet événement n'est réalisé par aucune issue lors de l'expérience considérée.
Par exemple, l'événement « l'élève prélevé suit avec passion les cours de mathématiques » ne contiendra aucune issue, à moins d'effectuer l'expérience sur une autre galaxie ce qui n'est pas le cas.
Comme cet événement ne contient aucune issue, il est *vide* : on le note donc $\emptyset$.

[a] C'est donc en général une fille.

Événement certain

C'est un événement réalisé par toutes les issues. Par exemple :« l'élève prélevé(e) est un(e) élève »
Comme cet événement contient toutes les issues, c'est en fait l'univers tout entier.

b. Réunion et intersection

Définition 4.2
Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité sur Ω. Soit A et B deux événements de Ω.
- L'événement constitué des éventualités appartenant à A *et* à B est noté $A \cap B$. (on lit « A inter B » ou « A et B »).
- L'événement constitué des éventualités appartenant à A *ou* à B ou aux deux est noté $A \cup B$. (on lit « A union B » ou « A ou B »).

Toujours en reprenant notre exemple initial
- $G \cap T$ est l'événement « l'élève prélevé est un garçon travaillant moins de 5 minutes »
- $G \cup T$ est l'événement « l'élève prélevé est un garçon ou un(e) élève travaillant moins de 5 minutes »

c. Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Nous pouvons, même à notre niveau, donner une définition d'une probabilité :

Définition 4.3
Notons Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).
On appelle probabilité sur Ω toute « transformation » $\mathbb{P}$ allant de l'ensemble des « parties » de Ω dans $[0,1]$ et vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour toutes « parties » A et B de Ω *disjointes* (C'est à dire dont l'intersection est vide).

C'est un peu abstrait. Mais il faut retenir qu'une probabilité est une sorte de fonction qui à un événement[b] associe un nombre compris entre 0 et 1.
En particulier

Propriété 4.1

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

On n'a pas trop de scrupules à se persuader que la probabilité de l'événement impossible est nulle. Par exemple, si vous lancez un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6, alors on écrira que la probabilité de l'événement « le résultat lu sur le dé est 42 » est nulle.

Ça se comprend...Mais ça peut même se prouver !
Allez...pour le plaisir intellectuel...même si ça ne tombera pas dans le contrôle...
Considérons Ω et $\emptyset$: leur intersection est bien sûr vide. Ce sont donc des événements disjoints.
D'après notre définition, on peut donc écrire que

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

Mais si vous collez du vide à un ensemble, celui-ci ne change pas, i.e. $\Omega \cup \emptyset = \Omega$.
Or, d'après notre définition, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, donc

$$1 = 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$$

Et nous en déduisons que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$[c]

Une autre propriété importante est

[b]Donc un ensemble
[c]Shakespeare aurait dit « *much ado for nothing...* »

Propriété 4.2

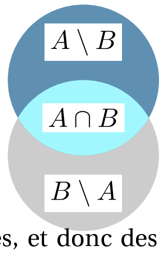
$$\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$$

Allez, essayez de le prouver : ça se fait comme pour la propriété précédente...

Ensuite, vous retiendrez

Propriété 4.3

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$



Pour cette dernière propriété, je vous donne un petit coup de pouce : il faut découper notre réunion en ensembles disjoints en écrivant par exemple que

- $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- $\mathrm{B} = (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$

Retenez donc que les probabilités, ce n'est pas du « bidouillage », qu'on utilise des définitions, des théorèmes, et donc des démonstrations comme par exemple vous le faites depuis longtemps en géométrie.

Faîtes bien attention maintenant à ne pas confondre univers fini et équiprobabilité. Considérez par exemple la situation suivante : on sonne à votre porte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Monica Bellucci (ou Quasimodo) qui vienne vous demander en mariage ? L'univers ne contient que deux événements élémentaires : ou bien c'est Monica ou bien ce n'est pas Monica. Le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles est donc de $1/2$, pourtant...

d. Un autre exemple pour mettre en pratique

Considérons l'expérience simplissime consistant à lancer deux fois un dé à six faces. L'univers Ω est donc constitué de l'ensemble des couples (i, j), avec i et j appartenant à l'ensemble $[\![1, 6]\!]$: il y a donc 36 éléments dans Ω. Intéressons nous à la somme des deux chiffres et soit A l'événement « le total fait neuf ».

$$\mathrm{A} = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit B l'événement : « on obtient 3 au premier lancer », alors

$$\mathrm{B} = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

III - Variable aléatoire

a. La théorie

Vous vous souvenez que l'*univers* probabilisable, souvent noté Ω, est constitué de toutes les « éventualités » ou « issues » d'une expérience aléatoire.
Avant de parler de lois de probabilités, penchons nous sur le terme *discrètes* : il traduit le fait que l'on peut « dénombrer » chacune des issues ; on peut leur donner un numéro. Nous étudierons plus tard dans l'année des lois de probabilité *continues* : on ne pourra pas donner un numéro à chacune des issues ; par exemple, on ne peut pas compter tous les nombres réels compris entre 2 et 3.

Définition 4.4 (Variable aléatoire)
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité. On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Soit $x_1, \cdots, x_k$ les différentes valeurs prises par la fonction X.
On note $\{X = x_i\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur x_i ». Il se note rigoureusement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$, ce qui se lit « l'ensemble des ω tels que $X(\omega) = x_i$ ».

Définition 4.5 (Loi de probabilité)
Soit (Ω, p) un univers muni d'une probabilité p et X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\varphi \ : \ x \mapsto p(X = x)$$

Remarque : si $x \notin \Omega$, alors $(X = x) = \emptyset$ et donc $p(X = x) = 0$.
Définir *la loi de probabilité d'une expérience aléatoire* reviendra donc à :

- ▷ déterminer toutes les valeurs possibles $x_1, \cdots, x_n$ prises par X ;
- ▷ calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements correspondants ;
- ▷ regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Vous n'oublierez pas de vérifier que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ d'après le principe des probabilités totales.

Définition 4.6 (Espérance mathématique)
On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \cdots + x_n \times p(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X = x_i)$$

La même chose sous un autre angle : puisque nous n'étudierons que des situations où l'univers n'est constitué que d'un nombre fini d'éléments, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

C'est ce que nous faisons en pratique : pour décrire le comportement d'une variable aléatoire, nous étudions son action sur chaque événement élémentaire. Ces événements élémentaires formant une partition de l'univers, on a

Théorème 4.1 (Espérance mathématique : autre formulation)
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'univers. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) \cdot p(\omega_i)$$

Exemple : on lance un dé honnête. On définit la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si le numéro du dé est pair et 1 sinon. Notons ω_i l'événement « le numéro de la face est i », alors $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et

i	1	2	3	4	5	6
$p(\omega_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X(\omega_i)$	1	2	1	2	1	2

D'après le théorème précédent, on a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

Nous aurions pu procéder autrement pour définir la loi de probabilité

Valeurs prises par X	1	2
Probabilité correspondante $p(X = x_i)$	$1/2$	$1/2$

alors, d'après la définition, $\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b. Variance

La variance mesure l'« écart » par rapport à l'espérance en faisant la somme des carrés des « distances » entre chaque valeur prise par la variable aléatoire et l'espérance pondérés par la probabilité correspondante, ce qui donne

Définition 4.7 (Variance)

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot p(X = x_i)$$

Remarque : on a choisi d'utiliser les carrés de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes ; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. On va donc définir une distance proprement dite en en prenant la racine carrée : c'est ce qu'on appelle l'écart-type.

Définition 4.8 (Écart-type)

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque : vous pouvez obtenir espérance, variance et écart-type très simplement à l'aide des modules statistiques de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, les probabilités correspondantes en liste 2.

IV - Quelques exercices

Exercice 1

Un jeu syldave consiste à lancer simultanément un dé cubique parfaitement équilibré et son voisin, lui aussi parfaitement équilibré, du 1^er^ étage.
Si le voisin tombe sur le dos, on lui associe le nombre 1. S'il tombe sur le ventre, on lui associe le nombre 2.
Un résultat est la somme du numéro obtenu sur le dé et du nombre obtenu par le voisin.

1. Dresser un arbre de toutes les possibilités.
2. Déterminez les probabilités de chaque événement élémentaire.
3. Déterminer les probabilités suivantes :
   a) la somme est impaire ;
   b) la somme est multiple de 3 ;
   c) la somme n'est ni 6, ni 5 ;
   d) la somme est au moins 4 ;

e) la somme est au plus 3.

Exercice 2

Dans la capitale syldave qui compte 300 habitants, 70 % sont des fiéfés menteurs.
40 % des habitants organisent des orgies de chamallow tous les jeudis soirs.
30 % des habitants sont des fiéfés menteurs qui organisent des orgies de chamallow tous les jeudis soirs.
La police secrète syldave torture au hasard un habitant de la ville. On note F l'événement « l'habitant torturé est un fiéfé menteur », O l'événement « l'habitant torturé organise des orgies de chamallow tous les jeudis soirs ».

1. Résumez la situation dans un tableau à double entrée.

2. Déterminez $\mathbb{P}(\overline{F} \cap O)$.

3. Déterminer $p(\overline{F} \cup O)$.

4. Calculez la probabilité que vous alliez passer vos vacances en Syldavie.

Exercice 3

Plusieurs amis syldaves veulent choisir une activité pour la soirée.
73 % d'entre eux veulent se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes, 30 % veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras, 3 % n'aiment aucune de ces deux activités.
Appelons V l'évènement « la personne veut aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras » et B l'évènement « la personne veut se baigner nue dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ».

1. Illustrer la situation à l'aide d'un tableau de probabilités.

2. Dessiner le diagramme de Venn correspondant.

3. Quelle est la part des amis qui veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras et se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ?

4. Quelle est la part des amis qui veulent aller chasser le ver de terre sauvage à poil ras ou se baigner nus dans la fontaine gelée de la Place du Génie des Carpathes ?

5. Quelle est la part de gâteau qui contient la fève ?

Exercice 4

On a trois cartons : on écrit sur le premier « $\mathfrak{K}$ », sur le second « $\mathfrak{X}$ » et sur le troisième « $\mathfrak{S}$ ». On retourne les cartons sur une table.

1. On choisit un carton, on note la lettre, on remet le carton sur la table, et on choisit de nouveau au hasard un deuxième carton, on note la lettre.

a) Construire un arbre de choix pour déterminer tous les tirages possibles.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « $\mathfrak{XS}$ » (« $\mathfrak{X}$ » puis « $\mathfrak{S}$ ») ?

2. On choisit un carton sans le remettre, on note la lettre, et on choisit de nouveau au hasard un deuxième carton, on note la lettre.

a) Construire un arbre de choix pour déterminer tous les tirages possibles.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « $\mathfrak{XS}$ » (« $\mathfrak{X}$ »puis « $\mathfrak{S}$ ») ?

Exercice 5

Quatre personnes déposent leurs Kalashnikov au vestiaire d'un restaurant syldave. La dame du vestiaire, un tantinet espiègle, décide de rendre les Kalashnikov au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins un client retrouve sa Kalashnikov ?

Indication : Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.

Exercice 6

Marko Ĉzzţtztshhhŷt veut se débarrasser de son beau-frère pour devenir Grand Conducteur de La Syldavie à sa place. Il lui confectionne donc un gâteau au chocolat avec 15 gousses d'ail[d] empoisonnées à l'intérieur.
Malheureusement, son beau-frère l'invite à partager le gâteau avec ses 6 gardes du corps qui font office de ministres.
Le gâteau est donc partagé en 8 parts de même taille.
Quelle est la probabilité que la part de Marko contienne au moins une part empoisonnée ?

V - Au Bac

Exercice 7

Un professeur d'Educatiors Physique et Sportive s'adresse à un groupe de vingt élèves au sujet de leurs loisirs intérêt pour le football dans la pratique de ce sport ou comme spectacle à la télévision.
Parmi ces vingt élèves, on sait que quinze regardent des matches à la television, huit pratiquent ce sport et cinq font les deux.

1. Montrer que deux élèves dans ce groupe ne s'intéressent au football ni dans la pratique, ni à la télévision.

2. Un élève de ce groupe est choisi au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il ne s'intéresse au football ni dans la pratique ni ni à la télévision ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il s'intéresse au football à la télévision sans le pratiquer ?

3. On interroge au hasard un élève qui regarde les matches à la télévision.
Quelle est la probabilité qu'il pratique le football ?

4. On attribue au hasard un numéro à chacun des vingt élèves. Une urne comporte 20 jetons avec les numéros en question.
On tire deux fois au hasard on jeton en le remettant dans l'urne après le premier tirage.
À chaque tirage, l'élève désigné gagne un billet d'entrée au match de son choix à condition qu'il pratique le football et le suive à la télévision.
   a) Déterminer le nombre total de tirages de deux jetons.
   b) Déterminer le nombre total de tirages permettant d'obtenir deux billets, Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de billets gagnants.
   c) Définir la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Exercice 8

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires.
La règle du jeu indique que :
- si la boule tirée est rouge, l'organisateur du jeu donne I € au joueur
- si la boule tirée est verte, l'organisateur du jeu donne 2 € au joueur
- si la boule tirée est noire, l'organisateur du jeu donne 0,50 € au joueur.

On admet que. lors de chaque tirage. toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
On note :
- p_R la probabilité de tirer tine boule rouge
- p_V la probabilité de tirer une boule verte
- p_N la probabilité de tirer tine boule noire.

[d] Une vieille recette syldave

Partie A

Dans cette partie, on suppose que le nombre de boules rouges, le nombre de boules vertes et le nombre de boules noires contenues dans l'urne sont tels que

$$p_{\mathrm{V}} = 2p_{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad p_{\mathrm{R}} = 2p_{\mathrm{N}}$$

On rappelle que, les boules contenues dans l'urne étant soit rouges, soir vertes, soit noires, on a l'égalité

$$p_{\mathrm{R}} + p_{\mathrm{V}} + p_{\mathrm{N}} = 1$$

1. Calculer p_{R}, p_{V} et p_{N}. (Donner les valeurs exactes.)

2. Sachant que l'urne contient 3 boules noires, calculer le nombre total de boules contenues dans l'urne, ainsi que le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes contenues dans l'urne.

3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ de la variable aléatoire X.

b) Si l'organisateur du jeu vendait 1,50 € un ticket donnant le droit d'effectuer en tirage, quel bénéfice pourrait-il espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que l'organisateur du jeu a rajouté des boules noires dans l'urne : l'urne contient 12 boules vertes, 6 boules rouges, n boules noires.

1. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule verte, la probabilité de tirer une boule rouge et la probabilité de tirer une boule noire.

2. Soir Y la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme reçue par le joueur.

a) Exprimer, en fonction de n, l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ de la variable aléatoire Y.

b) L'organisateur du jeu vend 1,50 € le ticket donnant le droit d'effectuer un tirage.
Comment peut-il choisir le nombre n de boules noires pour pouvoir espérer réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux ?

Exercice 9

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif).

Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, á prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 €, si la boule est jaune, il reçoit 2 € et si la boule est noire, il reçoit 1 €. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 €.

On note X_n la variable aléatoire qui, á chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est á dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable a aléatoire X_6.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.

2. Étude de la variable aléatoire X_n.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

b) Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n

c) Le club souhaite que l'espérance de X_n soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

Exercice 10

Une entreprise fabrique quatre type de pièces notées P_1, P_2, P_3 et P_4 et possède trois machines A, B et C pour procéder à leur conception.

- La fabrication de la pièce P_1 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et B.
- La fabrication de la pièce P_2 nécessite l'utilisation de chacune des machines B et C.
- La fabrication de la pièce P_3 nécessite l'utilisation de chacune des machines A et C.
- La fabrication de la pièce P_4 nécessite l'utilisation de chacune des trois machines A, B et C.

On considère un échantillon de 2000 pièces où il y a 700 pièces de type P_1, 1000 pièces de type P_2, 200 pièces de type P_3 et 100 pièces de type P_4.
On choisit au hasard une pièce dans l'échantillon. Il y a équiprobabilité des choix.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) « la pièce choisie est de type P_1 ».
   b) « la fabrication de la pièce choisie a nécessité l'utilisation de la machine B ».

2. Pour produire une pièce, l'utilisation de la machine A coûte 5 €, celle de la machine B coûte 4 € et celle de la machine C coûte 2 €. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie dans l'échantillon, associe son coût de réalisation. Ainsi la réalisation de la pièce P_1 coûte 9 €.
   a) Déterminer le coût de réalisation de chacune des pièces P_2, P_3 et P_4.
   b) Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Quel est le coût moyen de fabrication d'une pièce dans l'échantillon ?

Exercice 11

Un client d'un supermarché reçoit lors de son passage en caisse un ticket d'un jeu du grattage. Ce ticket comporte trois cases à gratter. Pour la première case deux résultats sont possibles I ou 2, pour la deuxième et la troisième case trois résultats sont possibles 1, 2 ou 3. Le client gratte les trois cases de son ticket.

1. Préciser le nombre de résultats possibles.

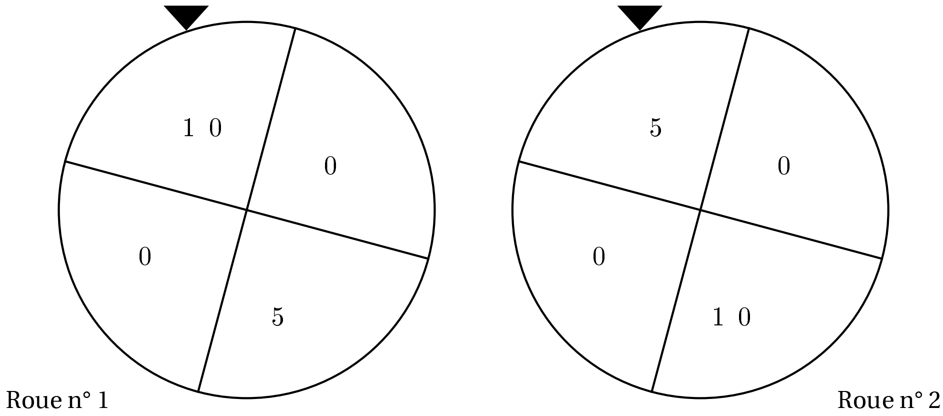
2. On considère les évènements suivants :
   - A : « Avoir 3 chiffres identiques »
   - B : « Avoir au moins une fois un 2 ».

   a) Déterminer la probabilité de A notée $\mathbb{P}(A)$ et celle de B notée $\mathbb{P}(B)$.
   b) Déterminer $\mathbb{P}(A \cap B)$, puis démontrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$.

3. Le client reçoit 5 € lorsqu'il obtient trois chiffres identiques, 2 € lorsqu'il obtient exactement 2 chiffres identiques et 0 € dans les autres cas. On appelle X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les gains précédents.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 12

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :
– Le joueur mise 10 euros.
– Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.
Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.
On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n° 1 / Roue n° 2	10	0	5	0
10				
0				
5				
0				

b) Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

d) Calculer la probabilité, notée $\mathbb{P}(G > 10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

e) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une valse de m euros.
On suppose dans cette question que la mise du joueur est m euros.
On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a) Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

b) Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

Exercice 13

Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0,26	0,23		0,15	0,05

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine.

2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.

3. Donner une représentation graphique de la fonction de répartition F de cette loi dans un repère convenablement choisi.

4. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).

5. Le prix de vente d'une voiture est de 13 500 €. Le vendeur perçoit une commission de 0,4 % sur le prix de vente pour chaque voiture vendue. Déterminer le montant moyen de la commission perçue en un an.