Mathématiques

T^ale^S3 / 2018-2019

Mis à jour le 28 septembre 2018 à 00:06

Une année de mathématiques en T^ale^S

Notre Dame
LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME N° 2

COMPLEXES - Épisode I

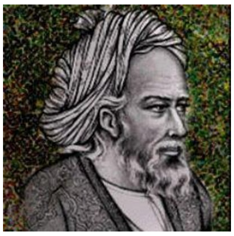
Les nombres complexes portent mal leur nom! Ils SIMPLIFIENT de nombreux domaines dans lesquels ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors commençons par parcourir le deuxième millénaire qui a vu mûrir petit à petit cette notion dans les esprits.

1 Approche historique

1 1 Les équations du second degré

Depuis plus de 3 000 ans on sait résoudre ce que l'on appelle aujourd'hui des équations du second degré. Cependant, très tôt, les Babyloniens, par exemple, sont restés bloqués au moment de résoudre des équations du troisième degré. Il faut attendre le XI[e] siècle pour qu'un savant perse commence à entrevoir une méthode approchée de résolution.
Toute cette section doit beaucoup aux activités proposées par Anne Boyé dans *Images, imaginaires, imaginations* paru chez *Ellipses en 1998* (pages 122-173)

1 2 Résolution géométrique de l'équation x³+ax=b



Omar Khayyam
(1048-1131)

Au XI[e] siècle vécut en Perse Ghiyath ed-din Abdoul Fath Omar Ibn Ibrahim al-Khayyam Nishabouri, ou plutôt : غياث الدين ابو الفتح عمر بن ابراهيم خيام نيشابورى , plus connu sous le nom d'Omar Khayyam. Il fut un poète joyeux et insouciant :

La Roue tourne, insoucieuse des calculs des savants.
Renonce à t'efforcer vainement de dénombrer les astres.
Médite plutôt sur cette certitude : tu dois mourir, tu ne rêveras plus,
Et les vers de la tombe ou les chiens errants dévoreront ton cadavre.

mais aussi un mathématicien visionnaire qui, avec quelques siècles d'avance sur les savants européens, découvrit des résultats importants concernant la résolution des équations du troisième degré. Son approche est géométrique et ne permet d'obtenir qu'une approximation graphique d'une solution.
Omar ne considérait que des équations à coefficients positifs.
Nous allons par exemple nous occuper de :

$$x^3 + ax = b \qquad (E)$$

où x, a et b désignent des nombres réels positifs mais jouant des rôles différents :

- x est l'*inconnue* de l'équation ; le but du jeu est en effet de déterminer les (ou des...) nombres réels positifs qui satisfont l'équation (E) ;
- a et b sont des *paramètres* : plutôt que d'étudier séparément des équations comme $x^3+2x = 1$, $x^3 + x = 7$, ..., Al Khayyam avait compris qu'elles pouvaient être résolues de manière similaire, quelque soit les valeurs positives prises par a et b. Les solutions de l'équation dépendront donc de ces paramètres.

Nous allons donc résoudre *qualitativement* l'équation (E).

1 2 1 Paraboles et cercles

Dans le premier quadrant d'un repère orthonormal, considérons la branche de parabole d'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{a}}$ et le demi-cercle passant par l'origine du repère, centré sur l'axe des x positifs et de diamètre $\frac{b}{a}$.

Recherche

> Démontrez que l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes, distinct de l'origine, est solution de (E).

1 2 2 Paraboles et hyperboles

Voyons les choses autrement :

$$(E) \iff x(x^2 + a) = b$$
$$(E) \iff x^2 + a = \frac{b}{x} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Recherche

> Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

1 3 La Renaissance italienne

1 3 1 Un saut dans l'espace-temps : combien l'équation x³+px+q=0 a-t-elle de solutions dans R ?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVIᵉ siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXIᵉ, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.
Considérons donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe [a]

Recherche

Calculez la dérivée de f.

Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

- $\boldsymbol{p \geq 0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- $\boldsymbol{p < 0}$: alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

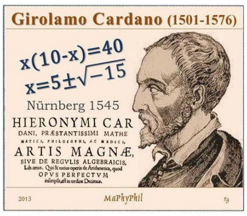
x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.

Recherche

Montrez que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.
Que vaut $f(a) \cdot f(-a) = ?$
Pourquoi a-t-on $f(a) < f(-a)$?
Entamez alors la discussion en distinguant trois cas (*Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois et...*)

1 3 2 Résolvons ces équations



Girolamo CARDANO (1501-1576)

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.
Giralomo CARDANO a établi en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

Recherche

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(E_1)\ :\ x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec $(E_2)\ :\ x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

a. comme nous le verrons dans un prochain chapitre mais l'idée paraît naturelle !...

Recherche

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$.
Utilisons alors la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce :

Recherche

calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$.

Recherche

Faites-le !
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIXe siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Évariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

1 4 Descartes et les imaginaires

René Descartes
(1596-1650)

Presqu'un siècle après Cardano, Bombelli e tutti quanti, cette racine carrée de -1 continue (et continuera) de faire peur.
Voici ce qu'écrit Descartes en 1637

> *Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement* **imaginaires** *; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ay dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ; comme encore qu'on puisse imaginer trois eb celle-ci $x^3-6xx+13x-10=0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2 ; et pour les autres, quoy qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.*

Recherche

Résolvez l'équation proposée par Descartes en tenant compte du renseignement qu'il donne.

1 5 Une notation malheureuse

Leonhard Euler
(1707-1783)

En 1774, le mathématicien suisse Leonhard Euler remarque que la notation $\sqrt{-1}$ peut prêter à confusion.
En effet, dans le cas où *a est un nombre positif*, vous avez appris que $\sqrt{a}$ *désigne le nombre positif dont le carré vaut a*.
Cela se traduit par l'égalité :

$$\text{Pour tout réel positif } a,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Recherche

- Vous avez de même établi que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$. Sauriez-vous le démontrer en utilisant la définition rappelée ci-dessus ?
- Si l'on généralise cette dernière règle à tous les réels, à quoi devrait être égal :
  - $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$?
  - $\left(\sqrt{-1}\right)^2$?
- Qu'en pensez-vous ?
- Calculez de même $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ de deux manières différentes.

Pour pallier à ces contradictions, EULER décide de désigner ce nombre $\sqrt{-1}$ par la lettre i (i comme...).
Ainsi :

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Cette notation ne sera pas adoptée tout de suite mais c'est elle dont l'usage est largement répandue de nos jours et que nous utiliserons.

Recherche

À l'aide de cette notation, écrivez le plus simplement possible les nombres qui ont pour carré -25 ; -2 ; $-\sqrt{3}$

1 6 Une représentation géométrique des nombres

1 6 1 Une même idée jaillie de trois esprits indépendants

Il vous est naturel de représenter des nombres sur une droite graduée, de visualiser ce que peut être un nombre négatif, l'addition de deux nombres mais cela nous cantonne à nous promener sur une droite.
D'un autre côté, les nombres, depuis l'antiquité, ne trouve leur validité auprès des mathématiciens (et aussi de leurs élèves) que si on peut les « construire ».
Or, voilà que l'espace mathématique est de plus en plus envahi par ces nombres imaginaires qui continuent à tordre les esprits car on ne peut pas les « voir ».

Jean-Robert ARGAND
(1768-1822)

Alors que les plus grands esprits depuis trois siècles essayent de donner vie à ces nouveaux nombres fort utiles, la lumière va venir en 1799 d'un modeste arpenteur-géomètre danois inconnu de tous (et qui le restera car il va publier son mémoire en danois et sera donc peu lu pendant un siècle avant d'être enfin traduit !), Caspar WESSEL , et presque simultanément (1806) d'un tout aussi modeste libraire suisse installé à Paris, Jean-Robert ARGAND, et enfin d'un prêtre français exilé en Angleterre et mathématicien amateur, Adrien-Quentin BUÉE.
Leurs résultats ne seront acceptés que lorsqu'ils seront re-découverts par des savants illustres dont le brillantissime GAUSS.

1 6 2 Les Français rationnels

Pour les deux francophones, il s'agissait de trouver une signification géométrique plausible pour ces nombres.

Recherche

Considérez un triangle EIA quelconque et soit K le projeté orthogonal de E sur [IA]. Montrez que

$$KA \cdot KI = KE^2$$

M. ARGAND nous demande alors de considérer un cercle de centre K, de diamètre [IA] et tel que E soit l'image de A par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On associe à K le nombre 0, à A le nombre 1. Il est alors naturel d'associer à I le nombre -1.

Recherche

Quel nombre peut-on associer à E ?

1 6 3 Le Danois pratique

L'arpenteur WESSEL a lui une vision plus dynamique : il veut représenter des directions par des nombres, non plus sur une droite seulement (positifs et négatifs) mais sur un plan (le plan des cartes qu'il doit dessiner !).
Laissons-le parler :

> *Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique et entre un segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu.*

Recherche

Petite pause : comment appelleriez-vous ces fameux segments orientés dont parle l'auteur ?

> *[..] Essayons donc de généraliser la signification des opérations : n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage aux segments de droite de même sens ou de sens opposés [...]. Si en même temps qu'on prend cette liberté, on respecte les règles ordinaire des opérations, on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres, mais on la développe seulement, on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisé à comprendre une théorie difficile.[...] Par là précisément [...] non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour expliquer le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur. Or il faut convenir que la démonstration générale de théorèmes géométriques devient souvent plus facile lorsqu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la soumettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers.* [b]

Voici résumé par un homme de terrain en quelques phrases ce qu'il faut comprendre sur ces nouveaux nombres qui sont l'objet de notre étude.

Recherche Commentez ce court extrait de l'introduction de l'essai de WESSEL.

1 6 4 Somme des nombres imaginaires

Voici comment WESSEL présente son addition de segments orientés :

> *L'addition de deux segments se fait de la manière suivante : on les combine en faisant partir l'un d'un point où l'autre se termine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue.* [c]

Recherche Ça vous rappelle quelque chose ? Que pensez-vous des termes utilisés ?

1 6 5 Produit de nombres imaginaires

WESSEL établit les règles suivantes :

> *[...]*
>
> - *Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;*
> - *En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit [...] dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.*
>
> *Désignons par $+1$ l'unité rectiligne, par $+\epsilon$ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de $+1$ sera égal à 0°, celui de -1 à 180°, celui de $+\epsilon$ à 90°et celui de $-\epsilon$ à -90°ou à 270°; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :*
>
> $(+1)\cdot(+1) = +1,\ (+1)\cdot(-1) = -1,\ (-1)\cdot(-1) = +1,\ (+1)\cdot(+\epsilon) = +\epsilon,\ (+1)\cdot(-\epsilon) = -\epsilon,$
> $(-1)\cdot(+\epsilon) = -\epsilon,\ (-1)\cdot(-\epsilon) = +\epsilon,\ (+\epsilon)\cdot(+\epsilon) = -1,\ (+\epsilon)\cdot(-\epsilon) = +1,\ (-\epsilon)\cdot(-\epsilon) = -1.$
>
> *Il en résulte que ϵ est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires.* [d]

b. Caspar WESSEL, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, pp 3-5 de la traduction française disponible sur Gallica http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g.r=caspar+wessel.langFR
c. Ibid page 7
d. Ibid page 9

Recherche

Illustrez par des schémas ce qui est clairement exposé par WESSEL.

On peut donc représenter un nombre à l'aide d'une « longueur » et d'une « déviation » (que nous appellerons bientôt *module* et *argument*).

Recherche

Dans un repère orthonormal orienté, représentez les nombres « impossibles » suivant les préconisations de WESSEL :

- $z_1 : \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_2 : \left[2, \frac{4\pi}{3}\right]$
- $z_3 : \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4 : \left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$
- $z_5 : \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_6 : \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_7 : \left[2, \frac{3\pi}{2}\right]$
- $z_8 : \left[1, \frac{5\pi}{2}\right]$
- $z_9 : \left[\frac{2}{3}, \pi\right]$
- $z_{10} : \left[\frac{3}{2}, 2\pi\right]$

Calculez ensuite le produit deux à deux des six premiers nombres en présentant vos résultats dans un tableau.

Construisez les « images » de $z_3 \cdot z_6$ et $z_1 \cdot z_3$.

Résolvez les deux équations suivantes :

$$(E_1) : \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cdot z = \left[3, \frac{\pi}{12}\right] \qquad (E_2) : \left[2, \frac{\pi}{3}\right] \cdot z = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

Écrivez la suite des puissances entières successives de $\left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$.
Faites de même avec $[r, \theta]$. Des commentaires ?

1 7 Gauss : clair et génial

Beaucoup de légendes circulent au sujet de Carl Friedrich GAUSS, fils d'un modeste jardinier, qui aurait commencé sa carrière mathématique très tôt en donnant instantanément à dix ans la somme des termes d'une suite arithmétique très compliquée, aurait dit « dites lui d'attendre un moment que j'aie fini » alors qu'on lui annonçait que sa femme se mourrait au milieu d'une de ses démonstrations. Sa devise était *pauca sed matura* ce qui explique qu'il ait publié des résultats bien des années après en avoir eu l'intuition.

Ceci étant, il donna dans sa thèse de Doctorat parue en 1799 une première démonstration de ce qu'on appellera ensuite le *théorème fondamental de l'algèbre*, à savoir que toute équation de degré n a n solutions pouvant s'écrire sous la forme $a + ib$ avec a et b des nombres réels et i le fameux nombre dont nous parlons depuis le début de ce cours.

Il appellera plus tard (1831) l'ensemble de tous ces nombres *ensemble des nombres complexes*, les opérations valables dans $\mathbb{R}$ se prolongeant dans cet ensemble comme nous l'avons découvert dans les paragraphes précédents.

Recherche

Essayez d'écrire les nombres suivant sous la forme $x + iy$ avec x et y des nombres réels et i le nombre de carré -1 :
$(3+5i)+(9-2i)$; $(3-4i)-(-1+i)$; $(a+bi)+(c+di)$; $4(2+7i)$; $(4+3i)(2+i)$
$(-2-i)(3+2i)$; $(a+bi)(c+di)$; $(a+ib)^2$; $(a+ib)(a-ib)$

Douze ans plus tard, il évoque dans une lettre au mathématicien Friedrich BESSEL un résultat qu'il ne publiera qu'en 1831 :

> *De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité a + bi. Le passage se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières.*

Recherche

Que vous rappelle l'idée exposée par Gauss ?
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, placez les points correspondant à :

$$1\ ;\ \mathrm{i}\ ;\ -\mathrm{i}\ ;\ 2-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\ ;\ 3-2\mathrm{i}\ ;\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

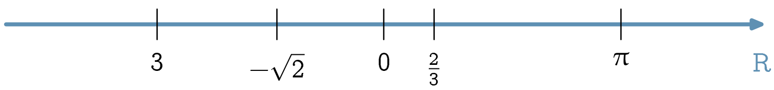
Les nombres réels sont-ils des nombres complexes ? Sur quelle partie du plan complexe se représentent-ils ? Quelle propriété caractérise les nombres représentés sur l'axe des ordonnées du plan complexe ?
Comment peut-on rapprocher les formulations $[r, \theta]$ et $a + \mathrm{i}b$?

Pour finir, une dernière citation de Gauss qui nous permettra de méditer sur les aléas du progrès scientifique :

> *Jusqu'à ce jour on avait surtout discuté sur la théorie des nombres complexes d'un mauvais point de vue, on avait senti une obscurité mystérieuse. Mais la raison de ceci est en grande partie due à une dénomination maladroite. Si on n'avait pas caractérisé* $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ *par unité positive, négative, imaginaire (ou plus fort impossible), mais par unité directe, inverse et latérale, l'obscurité mentionnée n'aurait pas surgi.*

2 Approche « moderne »

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[e], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[f] :

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x + 0 = 0 + x = x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2, c'est-à-dire pouvoir calculer avec des couples de nombres du style (x, y).

Téhessix : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessix : Ben pour l'addition, on fait $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessix : On a un élément neutre : (0,0) car $(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$.

e. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

f. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4e et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

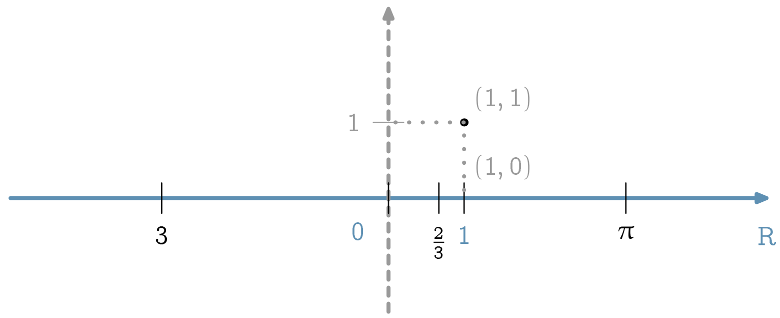
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessix : Et pour le symétrique, on prend $(-x,-y)$ car $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessix : Ça doit être pareil : $(x,y)\cdot(x',y')=(xx',yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

Téhessix : Fichtre ! Essayons : $(x,y)\cdot(1,0)=(x\cdot 1-y\cdot 0,x\cdot 0+y\cdot 1)=(x,y)$. Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Téhessix : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0,1)$ et élevez-le au carré.

Téhessix : Allons-y : $(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)$, bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0,1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellement en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessix : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*. L'idée vient de l'observation *intuitive*[g] :

$$(x,y)\rightsquigarrow x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)\rightsquigarrow x\cdot 1+y\cdot\sqrt{-1}\rightsquigarrow x+y\sqrt{-1}$$

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } P & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

g. Les $\rightsquigarrow$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prolongeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessix : Si vous le dites : $(x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y') = x+\mathrm{i}y+x'+\mathrm{i}y' = (x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, mais en plus simple.

Téhessix : Et $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = xx'+\mathrm{i}xy'+\mathrm{i}yx'+\mathrm{i}^2yy'$

Mathémator : N'oubliez pas que $\mathrm{i}^2 = -1$

Téhessix : Alors $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

3 Vocabulaire et premières propriétés

Théorème 2 - 1

Ensemble $\mathbb{C}$
On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a+\mathrm{i}b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

3 1 Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathrm{Re}(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathrm{Im}(z)$

Danger

$\mathrm{Im}(z)$ est un nombre réel.

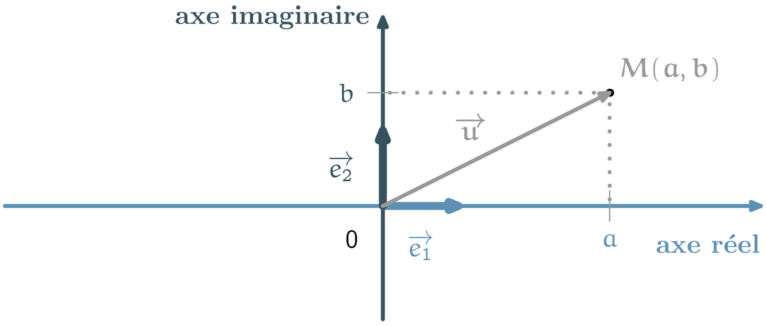
Aparté

À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?
Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+\mathrm{i}(7x-32y+1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+\mathrm{i}\cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+\mathrm{i}(7x-32y+1) = 0 \iff \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 7x-32y+1=0 \end{cases}$$

3 2 Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$



À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\vec{u}} = a + ib$

3 3 Premiers calculs géométriques

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b'), alors $\vec{u} + \vec{v} = (a + a')\vec{e_1} + (b + b')\vec{e_2}$, donc

Propriété 2 - 1

affixe d'une somme

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$$

- De même, si λ est un nombre réel

Propriété 2 - 2

affixe du produit par un réel

$$z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$$

- Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

Propriété 2 - 3

affixe du milieu

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

- Pour tous points A et B

Propriété 2 - 4

affixe d'un vecteur

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

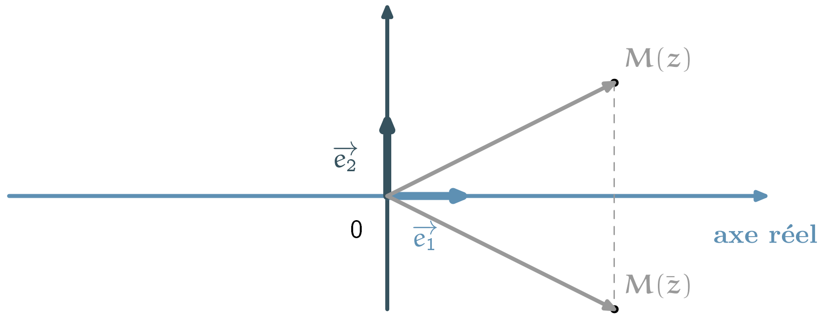
3 4 Conjugué d'un complexe

Définition 2 - 1

Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 2 - 5

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

3 5 À quoi servent les conjugués ?

3 5 1 À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel. **Pourquoi ?**

3 5 2 À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$$

Exemple

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + \mathrm{i}$:
$\dfrac{1}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2+\mathrm{i}} \cdot \dfrac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{4+1} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$

3 6 Conjugué de l'inverse

Sachant qu'un complexe non nul z admet une forme algébrique $a + \mathrm{i}b$, on sait maintenant trouver la forme algébrique de son inverse :

et donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} =$

3 7 Module d'un nombre complexe

Définition 2 - 2

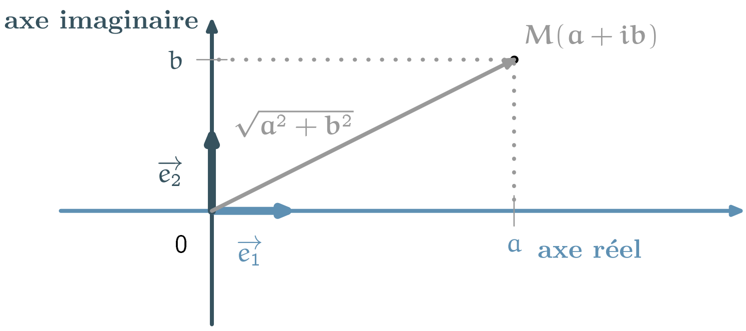
Module
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$$

Remarque

- Cette définition en est bien une car $z\ \overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

3 7 1 Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a + ib$, alors

Propriété 2 - 6

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2 + b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou encore la longueur OM.

Propriété 2 - 7

$$|z_M| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM \qquad \left|z_{\overrightarrow{u}}\right| = \|\overrightarrow{u}\|$$

3 7 2 Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 2 - 8

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| =$
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 2 - 9

Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Pour les curieux, voici comment cela se démontre.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2Re\left(z_1z_2\right) \leqslant 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

4 Résolution d'équations du second degré

4 1 Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

4 1 1 Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

$\boxed{\alpha \geqslant 0}$ alors $z^2 = \alpha \iff z^2 - \alpha = (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions[h] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$

Exemple

On connaît : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$

$\boxed{\alpha < 0}$ alors $z^2 = \alpha \iff (z - \mathrm{i}\sqrt{-\alpha})(z + \mathrm{i}\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$

Exemple

C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2\mathrm{i}$ ou $z = 2\mathrm{i}$

4 1 2 Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Exemple

Cherchons les racines carrées de $4 + 3\mathrm{i}$, à savoir les nombres $a + \mathrm{i}b$ tels que

$$(a + \mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 4 + 3\mathrm{i}$$

Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + \mathrm{i})$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + \mathrm{i})$

4 2 Résolution de ax²+bx+c=0 avec a, b et c des réels

C'est comme en 1ère :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 2 - 2

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Notons

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

le **discriminant** de l'équation et δ un *complexe* vérifiant

$$\delta^2 = \Delta$$

- Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } x = \frac{-b \pm \delta}{2a}}$$

h. LA solution si $\alpha = 0$

EXERCICES

Énigmes historiques

Recherche 2 - 1 Résolution d'une équation de degré 3

On veut résoudre l'équation :

$$(E)\ :\ x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

par la méthode de CARDAN.

a. Soit a un réel et $X = x - a$. Déterminez a pour que les solutions de (E) soient les solutions d'une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$.

b. Résoudre cette nouvelle équation d'inconnue X et en déduire les solutions de (E).

Recherche 2 - 2 Leibniz se trompe !

Une des conséquences du théorème fondamental de l'algèbre démontré par GAUSS est de pouvoir affirmer que tout polynôme dont les coefficients sont réels peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.
En 1702, le grand LEIBNIZ conjecture pourtant que ce résultat est faux en proposant les égalités suivantes avec a un réel et le fameux $\sqrt{-1}$ que nous n'utilisons plus :
$X^4 + 1 = \left(X^2 - \sqrt{-1}\right)\left(X^2 + \sqrt{-1}\right)$
$= \left(X + \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X - \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(X + \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(X - \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$
Que pensez-vous des solutions de l'équation $X^4 + 1 = 0$?
LEIBNIZ affirme alors que, quels que soient les deux facteurs qu'on regroupe, cela ne donnera jamais un facteur réel. Cette utilisation du symbole $\sqrt{}$ est décidément trompeuse. Menez l'enquête en évitant les $\sqrt{}$ et en utilisant plutôt i.

Exercices stakhanovistes

Recherche 2 - 3 Puissances de i

Exprimez chacun des nombres suivant comme un élément de l'ensemble $\{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$:

a. i^3
b. i^4
c. i^6
d. i^9
e. i^{16}
f. i^{32}

Recherche 2 - 4 Formes algébriques

Écrivez les nombres suivant sous forme algébrique :

a. $\mathrm{i}^8 + 3\mathrm{i}^7$
b. $(3+2\mathrm{i}) + (5-\mathrm{i})$
c. $(6-\mathrm{i}) + (4-3\mathrm{i})$
d. $(-2+3\mathrm{i}) + (6-4\mathrm{i})$
e. $(-2-\mathrm{i}) + (-1+7\mathrm{i})$
f. $(a+\mathrm{i}b) + (c+\mathrm{i}d)$
g. $(6-2\mathrm{i}) - 4$
h. $(a+\mathrm{i}b) - (2-3\mathrm{i})$
i. $(3+\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})$
j. $(1-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$
k. $(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$
l. $(1-4\mathrm{i})^2$
m. $(2+\mathrm{i})^3$
n. $\frac{1}{2-3\mathrm{i}}$
o. $\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$
p. $\frac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$
q. $\frac{2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
r. $\frac{3-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
s. $\frac{1}{\mathrm{i}}$
t. $1 + \mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^7$
u. $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$
v. $\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
w. $(-1+\mathrm{i})^4$
x. $\left(\frac{2+3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^4$
y. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8$
z. $\left(\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}\right)^{12}$

Recherche 2 - 5 Formes algébriques

On pose $z_1 = 3 - \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_3 = -2\mathrm{i}$. Écrivez sous forme algébrique :

a. $3z_1$
b. $z_1 - z_3$
c. $2z_1 + z_2$
d. $2z_2 + \mathrm{i}z_3$
e. $\mathrm{i}(z_2 z_3)$
f. $\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2$
g. $z_1 + \overline{z_2}$
h. $\mathrm{i}z_1 + \overline{z_3}$
i. $z_1\overline{z_2}$
j. $\mathrm{i}z_1^2 + \frac{z_2}{z_3}$
k. $(z_1 + \overline{z_2}^2)^2$
l. $z_3\left(z_1 + \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\right)^2$
m. $\left(z_1 + \overline{z_2}^2 + \frac{\mathrm{i}}{z_1+z_3}\right)^2$
n. $z_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{\mathrm{i}z_1}$

Recherche 2 - 6 Équations

Déterminez les valeurs des réels x et y ou la forme algébrique du complexe z satisfaisant les équations suivantes :

a. $x + \mathrm{i}y = (2-3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$
b. $(x+\mathrm{i}y) + 3(2-3\mathrm{i}) = 6 - 10\mathrm{i}$
c. $2x + \mathrm{i}y = 6$
d. $(x+\mathrm{i}y)(5+\mathrm{i}) = 3-2\mathrm{i}$
e. $(x+\mathrm{i}y)(2+\mathrm{i}) = (1-\mathrm{i})^2$
f. $(2-\mathrm{i})x - (1+3\mathrm{i})y - 7 = 0$
g. $x^2 + 2xy\mathrm{i} + y^2 = 10 + 6\mathrm{i}$
h. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 8 - 6\mathrm{i}$
i. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 5 + 12\mathrm{i}$
j. $(x+\mathrm{i}y)^2 = -3 + 4\mathrm{i}$
k. $\frac{2}{z} = \frac{1}{2-\mathrm{i}} + \frac{1}{1+2\mathrm{i}}$
l. $\frac{x}{1+\mathrm{i}} + \frac{y}{1+2\mathrm{i}} = 1$
m. $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + x\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}$

Recherche 2 - 7 Modules

Calculez les modules suivants :

a. $|-3+4\mathrm{i}|$
b. $|6-8\mathrm{i}|$
c. $|5+\mathrm{i}|$
d. $|-3\mathrm{i}|$
e. $\left|\sqrt{2}+\mathrm{i}\right|$
f. $\left|\sqrt{2}+1\right|$
g. $\left|\frac{1}{4+3\mathrm{i}}\right|$
h. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right|$
i. $\left|-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}\right|$
j. $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$
k. $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|$

Recherche 2 - 8 Modules

a. Sachant que $z_1 = -3-2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-3\mathrm{i}$ calculez :
$|z_1|$; $|z_1 - z_2|$; $|z_1 + 2z_2|$; $|z_1 z_2|$

b. Sachant que $z_1 = 5+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2+3\mathrm{i}$, vérifiez que

$$|z_1|^2 = 2|z_2|^2$$

c. Soit $k \in \mathbb{R}$, $z_1 = -1+8\mathrm{i}$, $z_2 = (1-k)+7\mathrm{i}$. Déterminez les valeurs de k telles que $|z_1| = |z_2|$.

d. Soit $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y des réels. Montrez que :

$$|z-2\mathrm{i}| - |z-1| \Leftrightarrow 2x - 4y + 3 = 0$$

e. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $|11+2\mathrm{i}| = |x+1+5\mathrm{i}|$.

f. Résolvez dans $\mathbb{C}$ $\sqrt{5}|z| + \mathrm{i}z = 3+\mathrm{i}$.

Recherche 2 - 9 Équations de degré 2 ou 3

a. Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

i. $z^2 + 6z + 10 = 0$
ii. $z^2 - 2z + 2 = 0$
iii. $2z^2 - 2z + 5 = 0$
iv. $z^2 - 6z + 10 = 0$
v. $z^2 + 1 = 0$
vi. $z^2 + z + 1 = 0$
vii. $z^2 - \mathrm{i}\sqrt{2}z - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

b. Vérifiez que $5+\mathrm{i}$ est solution de $z^2 - 10z + 26 = 0$ puis déterminez la deuxième solution.

c. Déterminez des équations du second degré telles que les nombres suivants en soient les solutions :
$\pm 2\mathrm{i}$; $1 \pm 2\mathrm{i}$; $3 \pm 2\mathrm{i}$; $-2 \pm \mathrm{i}\sqrt{5}$

d. Si $3-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2 + kz + 13 = 0$ où k est un réel, déterminez k et trouvez l'autre solution de l'équation.

e. L'équation $2z^2 - (7-2\mathrm{i})z + k = 0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k puis la deuxième solution de l'équation.

f. Si $-1-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2 + az + b = 0$, déterminez les réels a et b.

g. L'équation $z^2 + (-3+2\mathrm{i})z + k - \mathrm{i} = 0$ où $k \in \mathbb{R}$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k et la deuxième solution de l'équation.

h. L'équation $z^2 + (p+5\mathrm{i})z + q(2-\mathrm{i}) = 0$ admet $1+2\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez p et q ainsi que l'autre solution de l'équation.

i. L'équation $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Trouvez les deux autres solutions.

j. Idem avec $2z^3 - 9z^2 + 30z - 13 = 0$ et $2+3\mathrm{i}$.

k. Idem avec $z^3 - 8z^2 + 22z - 20 = 0$ et 2.

l. Idem avec $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$ et $1-\mathrm{i}$.

m. Idem avec $z^3 - \mathrm{i}z^2 - z + \mathrm{i} = 0$ et i

n. Idem avec $z^3 - 4z^2 + 4z + k = 0$ et $1-3\mathrm{i}$ en commençant par déterminer le réel k.

o. Idem avec $z^3 + kz^2 + z + 34 = 0$ et $4-\mathrm{i}$.

p. Factorisez $z^3 - 1$ par $z - 1$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 1 = 0$.

q. Factorisez $z^3 + (3+\mathrm{i})z^2 - 4z - 12 - 4\mathrm{i}$ par $z^2 - 4$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (3+\mathrm{i})z^2 - 4z - 12 - 4\mathrm{i} = 0$.

Recherche 2 - 10 Équation dans C

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation $\frac{z+1}{z-1} = 1 + \mathrm{i}$.

Recherche 2 - 11 Système d'équations dans C

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2\mathrm{i}z_1 + z_2 = 0 \end{cases}$

Recherche 2 - 12 Équation à coefficients dans R

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Recherche 2 - 13 Équation à coefficients dans C

a. Calculer $(3 - 2\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 + 3\mathrm{i} = 0$.

b. Calculer $(5 - 3\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (5 - \mathrm{i})z + 2 + 5\mathrm{i} = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 + 3\mathrm{i})z + 10 + 5\mathrm{i} = 0$.

Recherche 2 - 14 Centres étrangers, juin 2007

a. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

b. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

c. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Recherche 2 - 15 Amérique du Nord, juin 2006

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Recherche 2 - 16 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $1/z$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ la forme algébrique de z et $x' + \mathrm{i}y'$ celle de l'affixe z' de M'.

a. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

b. Quelle est l'image de M' par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.

c. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.

d. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

Recherche 2 - 17 Équations - systèmes

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

i. $\dfrac{z+2}{z+2\mathrm{i}} = i$

ii. $2z + \mathrm{i}\overline{z} = 5 - \mathrm{i}$

b. Résoudre dans $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2\mathrm{i}z + z' &= 2\mathrm{i} \\ 3z - \mathrm{i}z' &= 1 \end{cases}$

Recherche 2 - 18 Équations coeff complexes

a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

b. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(\mathrm{F}) : z^2 - 2z + 4 + 4\mathrm{i} = 0$$

c. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

d. Résoudre l'équation (F).

Recherche 2 - 19 Équation de degré 4

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

c. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\mathrm{i}$, $n = -2 - 4\mathrm{i}$, $p = 2 + 3\mathrm{i}$ et $q = 2 - 3\mathrm{i}$.

d. **i.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z - p}{z - m} = i$. Placer son image K.

ii. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

e. **i.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

iii. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Recherche 2 - 20 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

a. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.

b. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

c. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.

d. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Recherche 2 - 21 Bac 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

i. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

ii. Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c - 9}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c - 9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Recherche 2 - 22 Bac 2017

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Recherche 2 - 23 **Bac 2017**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

Recherche 2 - 24 **Bac 2012**

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **i.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
ii. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Recherche 2 - 25 **Bac 2011**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{C}}$ et z_{D} où :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}, \quad z_{\mathrm{C}} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}.$$

i. Placer les points A et B dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
ii. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
iii. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

Recherche 2 - 26

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = 2z_{\mathrm{B}} \quad ; \quad z_{\mathrm{D}} = 3.$$

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

4. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - 3}{z_{\mathrm{A}} - 3}$.

Recherche 2 - 27 Bac 2011

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. **i.** Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

ii. Faire une figure et construire les points P et Q.

2. **i.** Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

ii. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On suppose que l'origine O du repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. Montrer que $|a| = |b| = |c|$ puis que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$.

2. Montrer que $a + b + c = 0$.

3. Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$.

4. En utilisant A, montrer que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.

Recherche 2 - 28 Bac2015

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble E.