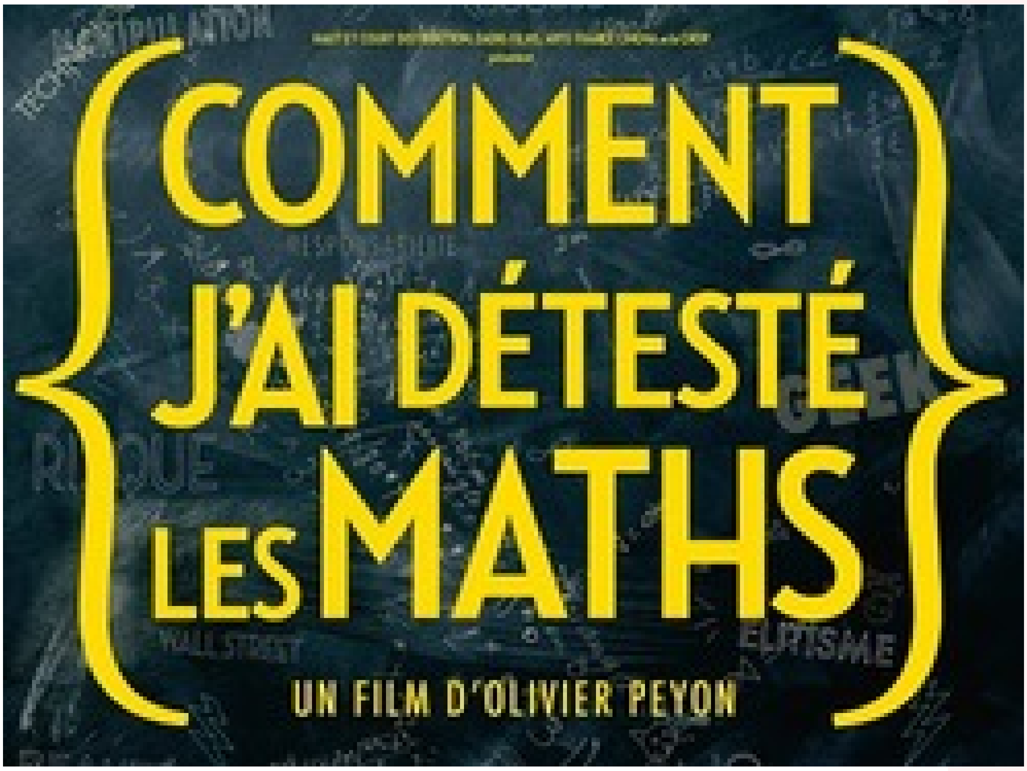
Mathématiques

2ale5 / 2018-2019

Mis à jour le 7 octobre 2018 à 16:32

Une année de mathématiques en 2nde

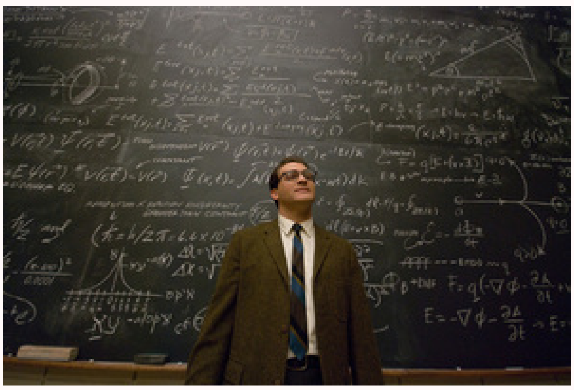


Notre Dame LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME Nº 1

NUM3ERS



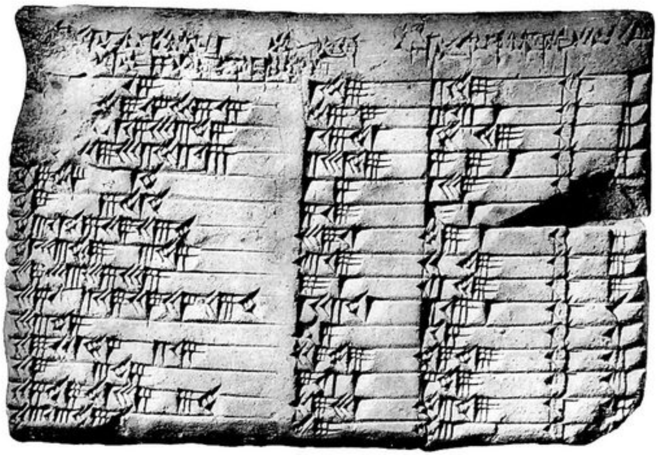
Rien de nouveau ?

1 Expéditions scientifiques

1 1 Voyage à Babylone

1 1 1 Numération babylonienne

Dans la paisible région où se trouve actuellement l'Irak, près de la Syrie, au cours du deuxième millénaire avant Astérix et Obélix, à Babylone, apparut un autre système de numération. La forme, d'abord, était différente car les Babyloniens utilisaient des tablettes et des poinçons au lieu de papyrus et de pinceaux. Il y avait principalement deux caractères : 𒁹 et 𒌋 .



Pour compter jusqu'à 59, le système fonctionne comme en Égypte et plus tard en Grèce et à Rome : on ajoute la valeurs des signes écrits. Ainsi 𒌋 𒐖 correspond à 12, 𒐏 𒐜 à 48.
Lisez les nombres suivants : 𒌍 𒐝 ; 𒐏 𒐗 ; 𒎙 𒐝 .
Proposez d'autres exemples à vos voisins.

À partir de 60, la numération ressemble plus à la nôtre car elle devient « positionnelle » : en effet, la valeur d'un signe dépend de sa position par rapport aux autres.
Ainsi, 63 s'écrit 𒁹 𒐗 , c'est-à-dire 1 fois 60 plus 3 fois 1.
De même, 𒐗 𒎙 𒐗 correspond à $3 \times 60 + 23 = 203$
Enfin 𒐖 𒌋 𒐝 𒌍 𒐙 correspond à 2 soixantaines de soixantaines + 19 soixantaines +35, c'est-à-dire ?

Proposez d'autres nombres à vos voisins.

.

Que pensez-vous de cette opération : 𒌋 𒐙 + 𒐐 𒐙 = 𒁹 ?
Et de celle-ci : 𒐖 × 𒁹 𒌍 = 𒐗 ?
Est-ce que ça ne vous rappelle pas quelque chose ?

Les Babyloniens étaient confrontés à une petite ambiguité : le nombre 𒐗 𒎙 𒐗 qu'on peut noter $[3; 23]$ représentait à la fois

— $3 \times 60 + 23$;

— $3 \times 60^2 + 23 \times 60$;

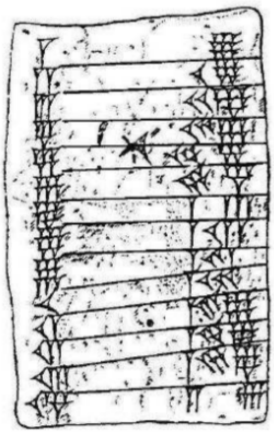
— $3 + 23 \times \frac{1}{60}$;

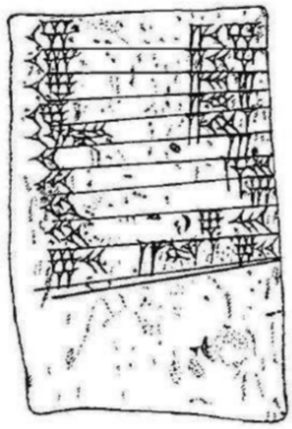
— etc.

En fait, cela fait penser aux « multiplications à virgules » de l'école primaire où vous « décaliez » la virgule quitte à rajouter des zéros : pourquoi ?

1 1 2 Multiplication babylonienne

Les petits Babyloniens devaient apprendre beaucoup de tables de multiplications qui ressemblaient à ce « cahier » d'écolier : de quelle table s'agit-il ?

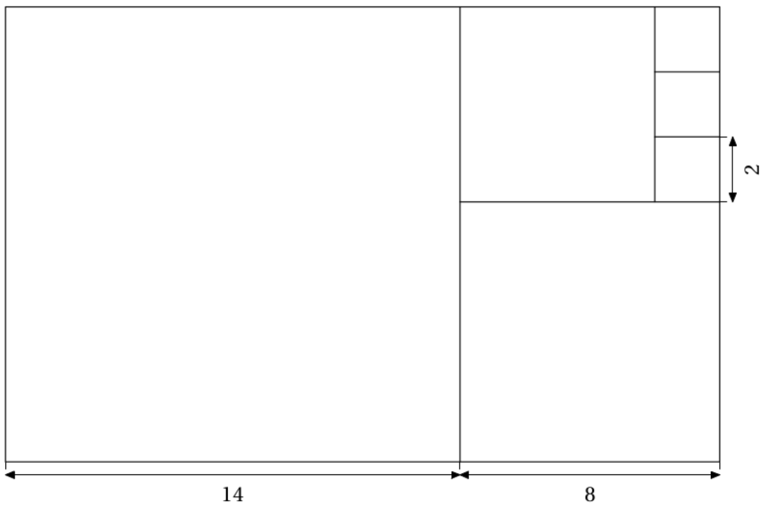




Ils disposaient également d'une table des carrés ; complétez la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	1	4	9																	

Pour multiplier 14 par 22, ils avaient ce petit dessin en tête :



et il ne restait plus qu'à additionner : $14 \times 22 = 14^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$
Multipliez de la même manière 17 par 31.

1 2 Au Royaume-Uni

L'unité de base britannique pour mesurer les masses est la livre « *pound* » dont l'abréviation est en toute logique **lb**...

Une livre correspond *environ* à 453,49g. Pour des mesures plus fines, on utilise l'once « *ounce* » (**oz**) qui vaut $\frac{1}{16}$lb et le dram (**dr**) qui vaut $\frac{1}{16}$oz.

Pour des mesures plus importantes, on utilise les pierres « *stone* » (**st**) sachant que 1st= 14lb. Combien pesez-vous ? Quelle est votre masse en pierre et livre ?

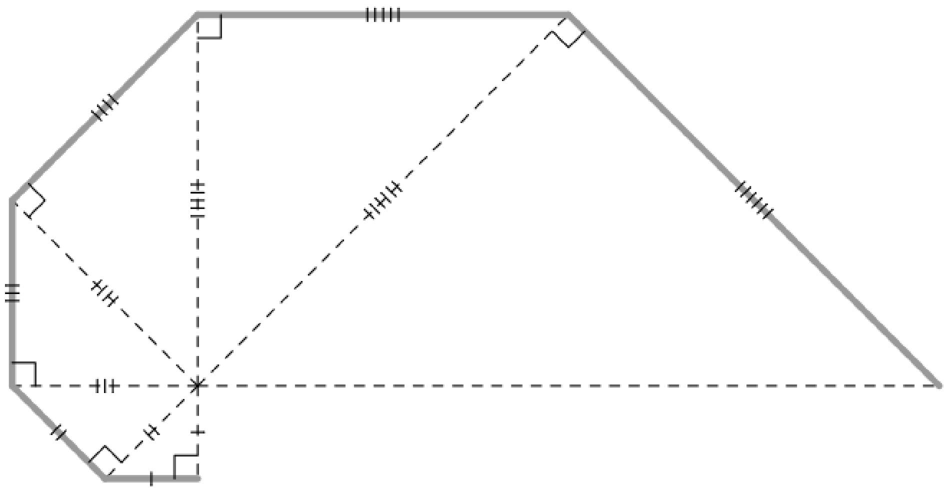
Vous pesez votre panier rempli de canettes d'Irn Bru et la balance indique $2\frac{3}{8}$ lb : qu'est-ce que ça signifie ? Quelle est la masse correspondant en grammes ?

Et si vous trouvez $3\frac{5}{16}$ oz de diamant dans votre jardin ?

1 3 Vers nos racines

Il aurait été plus correct d'intituler cette activité : **construisons des irrationnels à la règle et à l'équerre**. Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? Déduisez-en une *construction* de $\sqrt{2}$.
Construisez de même $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{11}$.

Casse-tête en forme d'escargot adepte du cubisme : quelle est la longueur du dixième segment gris de cette spirale [a] ?

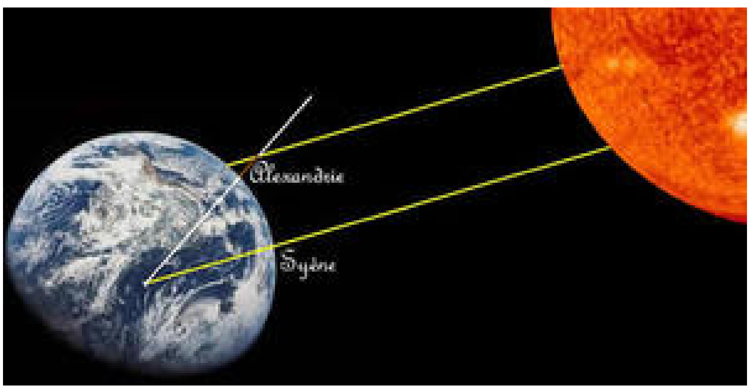


1 4 Vers l'horizon

Recherche

souvenir de vacances
Je suis au bord d'une falaise près de Douvres et je contemple l'horizon, là-bas, au loin, cherchant la côte française. La Terre semble être un disque plat dont je suis le centre. Au fait, *à quelle distance se trouve l'horizon ?*

Un petit dessin s'impose...



Comme nous, Ératosthène, directeur de la bibliothèque d'Alexandrie vers -240, se doutant que la Terre était une sphère, voulut calculer son rayon.
Il observa l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans

a. Je ne vous demande pas de prouver le résultat mais juste de le deviner l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, Ératosthène remarqua qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène (ville située à peu près sur le tropique du Cancer) ; ainsi, à ce moment précis, le Soleil était vertical et sa lumière éclairait directement le fond du puits. Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre ; le Soleil n'était donc plus à la verticale et l'obélisque avait une ombre décentrée. Il mesura que l'ombre était 8 fois plus petite que l'obélisque.

Ératosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie : la distance obtenue était de 5000 stades (50 jours à dos de chameau à raison de 100 stades par jour), mesure très proche de la réalité, un stade (longueur utilisée dans les stades d'Olympie ou de Delphes) valant environ 157,5 m.

Recherche

rayon de la Terre
En utilisant les mesures d'Ératosthène, peut-on calculer le rayon de la Terre ?

1 5 Vers l'infini et au-delà...

1 5 1 Curiosité

Observez ce qu'affiche une calculatrice quand vous effectuez les calculs suivants :

$$\frac{324-32}{9} \qquad \frac{3245-32}{99} \qquad \frac{324510-32}{9999}$$

Recherche

Sans preuve, essayez d'écrire 57,33333333333333333333... sous forme de fraction.

1 5 2 Une histoire de ...

Par convention, les ... veulent dire qu'il y a une infinité de 3 à droite de la virgule. C'est un peu vague, nous en reparlerons plus bas.

Recherche

À votre avis, que vaut 1,333... −1,333 ? 1,333− 1,333 ? $1,333\cdots-1,333$?

Tout ça reste un peu empirique.

1 5 3 L'algèbre au secours de la numération

Nous aimerions prouver ce que nous avons observé tout à l'heure. Essayons donc d'écrire 32,444... sous forme de fraction, puisque la machine nous dit que *ça a l'air* possible.

Comme c'est embêtant d'écrire 32,444..., nous allons lui donner un petit surnom, par exemple *Joe*.

Donc $Joe = 32,444\ldots$.

Recherche

LA ruse : que vaut $10 \times Joe - Joe$? Déduisez-en que Joe est un nombre rationnel puis retrouvez les résultats précédents.

1 5 4 Développement décimal périodique

Posez la division de 1 par 3, vous obtenez sans cesse le reste 1 et le développement décimal est donc 0,33333333333...

En fait, il existe une écriture qui évite les ... : $0,\underline{3}$ signifie de la même manière que le 3 se répète infiniment.

Voyez ce que donne 13/7.

$$
\begin{array}{l|l}
1\;3 & 7 \\ \cline{2-2}
\;\;6\;0 & 1.8\;5\;7\;1\;4\;2\;8\;5\;7 \\
\;\;\;\;4\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;5\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;1\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;6\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;4\;0 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5\;0 & \\
\;1 &
\end{array}
$$

Donc on écrit $13 \div 7 = 1.\underline{857142}\ldots$

> **Recherche**
>
> En utilisant ce qui a été fait précédemment, essayez d'écrire $1.\underline{857}$ sous forme de fraction.

1 5 5 Si, et seulement si

Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé, mais est-ce que **si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave ?
La première proposition [b] est une **implication** vraie : nager en maillot de bain dans un lac syldave implique d'être mouillé.
On utilise le symbole $\Longrightarrow$ pour matérialiser cette implication :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \Rightarrow \text{être mouillé}$$

La deuxième proposition [c] est l'**implication réciproque**. Dans le cas qui nous occupe, cette implication réciproque est fausse

$$\text{être mouillé} \not\Rightarrow \text{nager en maillot dans un lac syldave}$$

On dit que ces deux propositions ne sont pas **équivalentes** :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \not\Leftrightarrow \text{être mouillé}$$

> **Recherche**
>
> Que pensez-vous de l'affirmation : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle* ?
> Et celle-ci : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle et un losange*

Revenons à nos nombres.

> **Recherche**
>
> En pensant à la division posée, expliquer pourquoi un nombre rationnel admet forcément un développement décimal périodique.
> Inversement, expliquez pourquoi un nombre admettant un développement rationnel périodique est forcément rationnel.
> Comment exprimer ces résultats en termes d'équivalence ?

1 5 6 Les limites du développement décimal

> **Recherche**
>
> Écrivez sous forme de fraction le nombre $1{,}\underline{9}$.

Des remarques ?

b. **Si** je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé
c. **Si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave

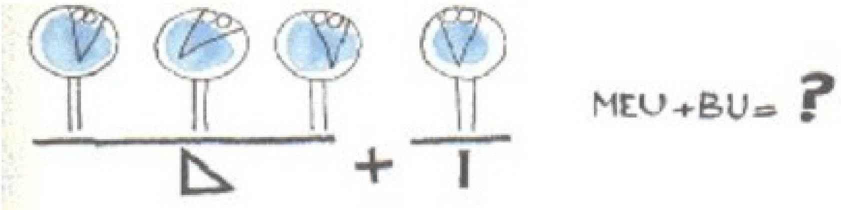
2 Les Bases

2 1 La numération shadock

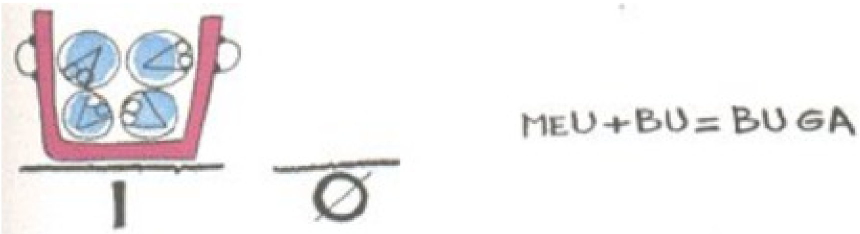
Le calcul a toujours donné beaucoup de fil à retordre aux Shadoks... En effet n'ayant que quatres cases il ne pouvait pas compter plus que quatre... 1, 2, 3, 4... Mais le professeur Shadoko avait réformé tout ca...

— Quand il n'y a pas de Shadoks, on dit GA ;
— Quand il y a un shadok de plus, on dit BU ;
— Quand il y a encore un shadok de plus, on dit ZO ;
— Et quand il y a encore un autre, on dit MEU.

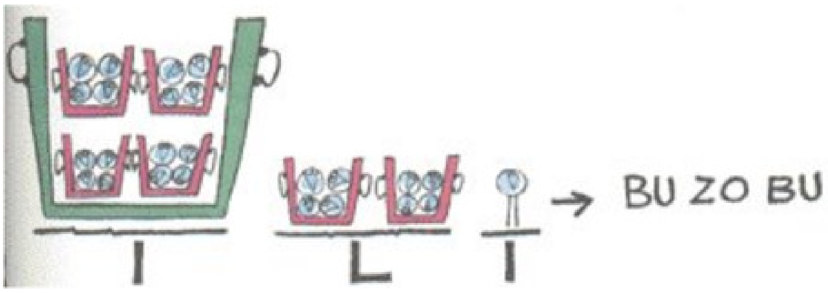
Si je mets un shadok en plus, évidement, je n'ai plus assez de mots pour les compter...



alors c'est très simple : on les jette dans une poubelle, et je dis que j'ai BU poubelle. Et pour ne pas confondre avec le BU du début, je dis qu'il n'y a pas de Shadok à coté de la poubelle et j'écris BU GA.



Bu Shadok à coté de la poubelle : BU BU.
Un autre : BU ZO.
Encore un autre : BU MEU.
...
MEU poubelles et MEU Shadoks à coté : MEU MEU. Arrivé là si je mets un Shadok en plus, il me faut une autre poubelle.
Mais comme je n'ai plus de mots pour compter les poubelles, je m'en débarrasse en les jetant dans une grande poubelle. J'écris BU grande poubelle avec pas de petite poubelle et pas de Shadok à coté : BU GA GA.
Et on continue... BU GA BU, BU GA ZO....



MEU MEU ZO, MEU MEU MEU.
Quand on arrive là et qu'on a trop de grandes poubelles pour pouvoir les compter, eh bien, on les met dans une super poubelle, on écrit BU GA GA GA, et on continue...
Vous trouverez une machine à calculer shadock ici :
http://www.lesshadoks.com/telechargement/Install.exe
Pour voir en image ce que nous venons de découvrir, c'est là :
https://youtu.be/lP9PaDs2xgQ

3 Le code bibinaire

FIGURE 1.1 – Bobby Lapointe (1922 - 1972)

Boby LAPOINTE, célèbre chanteur français, était aussi mathématicien à ses heures. Ayant trouvé le code binaire trop compliqué à utiliser, il inventa le code... bibinaire (il y a un jeu de mot caché). Il suffit de remplacer les chiffres par des lettres. On commence par couper le nombre écrit en binaire en paquets de 2. S'il y a un nombre impair de chiffres, on rajoute un zéro à gauche, ce qui ne modifie pas la valeur de nombre (expliquez pourquoi). On commence par le premier groupe de deux chiffres le plus à droite. On remplace 00 par O, 01 par A, 10 par E, 11 par I.
Puis on prend le paquet de deux chiffres suivants en se déplaçant de droite à gauche. On remplace 00 par H, 01 par B, 10 par K, 11 par D.
Pour le paquet suivant, on recommence avec les voyelles. S'il y a encore un groupe, on remplace par une consonne, etc.

Recherche

1. Écrivez les nombres de 0 à 31 en bibinaire.
2. Récitez la table de multiplication par HI en bibinaire.
3. Quelle est la base du bibinaire ?
4. Pour les curieux : écrivez 1177 en bibinaire.
5. Écrivez KEKIDIBIBI en numération décimale et également KEBOKADO.
6. Pour les très curieux : quel est le plus grand nombre qu'on peut écrire avec six lettres en bibinaire ?

4 Différents ensembles de nombres

Recherche

Nous avons passé en revue différents types de nombres que l'on pourrait regrouper par catégories : lesquelles ?

4 1 Où classer la racine carrée de 2 ?

DÉFI

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : qu'est-ce que cela implique ?

4 2 Héron d'Alexandrie

Contemporain de l'empereur Auguste, Héron d'Alexandrie est célèbre pour avoir déterminé un moyen d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ mais les Babyloniens connaissait cette technique bien avant lui.
Le secret de la méthode part de la constatation suivante : si x est un nombre plus grand que $\sqrt{2}$ alors $\frac{2}{x}$ est plus petit que $\sqrt{2}$. Pouvez-vous le prouver ?
Si on part de $x = 2$, qu'est-ce que cela prouve ? Mmmmmmmm... pas terrible.
Prenons le milieu entre x et $\frac{2}{x}$: est-il plus grand ou plus petit que $\sqrt{2}$? Comment en être toujours sûr ?
Comment utiliser ces remarques pour trouver une approximation en base 10 de $\sqrt{2}$?

Exercices

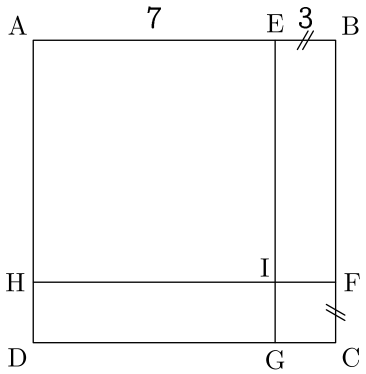
Légende

— Objectif : Survivre — Objectif : Le DS — Objectif : Défi

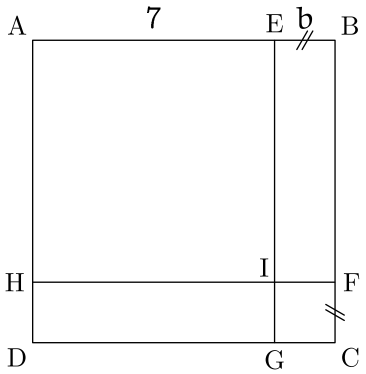
Exercices techniques

Recherche 1 - 1 Carrés remarquables

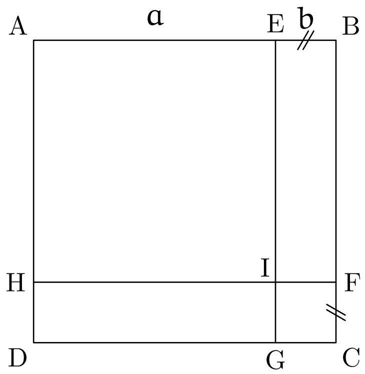
Dans chacun des cas suivants, exprimer de deux façons différentes l'aire du carré $ABCD$ et écrire l'égalité ainsi obtenue.



...... = ...



...... = ...



...... = ...

Recherche 1 - 2 De tête

Calculer « *Deux cent milliards neuf au carré moins deux cent milliards huit au carré* », c'est-à-dire le nombre :

$$200\,000\,000\,009^2 - 200\,000\,000\,008^2$$

Recherche 1 - 3 Somme ou produit ?

a×	b×	c×	d×	e×
f×	g×	h×	i×	j×
k×	l×	m×	n×	o×
p×	q×	r×	s×	t×
u×	v×	w×	y×	z×

Pour chaque question de ce QCM, il y a une ou plusieurs bonnes réponses. Si, à la première question, la réponse est a par exemple, tracer dans le cadre ci-dessus le segment [fl], et ainsi de suite. Ce dessin est constitué de quatre lettres qui forment le mot :

1. L'expression $A = (4x+5) + x(2x-1)$ écrite ainsi est

- **a.** une somme [fl]
- **b.** un produit [bf]
- **c.** une somme de carrés [bh]
- **d.** une différence de carrés [bc]

2. L'expression $B = 4 - (3x+1)^2$ écrite ainsi est

- **a.** une somme [cg]
- **b.** un produit [ci]
- **c.** une somme de carrés [ei]
- **d.** une différence de carrés [lq]

3. En développant l'expression $(3x-5)^2$, on obtient :

- **a.** $9x^2 + 25$ [kp]
- **b.** $9x^2 - 30x + 25$ [cm]
- **c.** $9x^2 - 15x + 25$ [ot]
- **d.** $9x^2 - 25$ [ej]

4. En développant l'expression $(2x-1)(2x+1)$, on obtient :

- **a.** $2x^2 - 1$ [mr]
- **b.** $4x^2 + 1$ [nr]
- **c.** $4x^2 - 4x - 1$ [io]
- **d.** $4x^2 - 1$ [no]

5. En développant l'expression $(x-1)(x+2)$, on obtient :

- **a.** $x^2 + x + 2$ [mq]
- **b.** $x^2 + 3x + 2$ [pu]
- **c.** $x^2 + x - 2$ [vw]
- **d.** $3x - 2$ [wy]

6. En développant puis en réduisant l'expression $(2x-1)^2 - (x+3)^2$, on obtient :

- **a.** $(x-4)(3x+2)$ [uv]
- **b.** $3x^2 - 10x - 8$ [yz]
- **c.** $x^2 - 8$ [rv]
- **d.** $(x-4)^2$ [lp]

7. L'expression $(3x-2)(3x+4)$ est une factorisation de :

- **a.** $(3x+1)^2 - 9$ [bg]
- **b.** $(3x+10)(3x-8)$ [ms]
- **c.** $(3x-4)(3x+4)$ [tz]
- **d.** $(3x-2)^2$ [pv]

8. En factorisant l'expression $(x-2)(2x+3) - (x-2)(3x-12)$, on obtient :

- **a.** $(x-2)(-x+15)$ [dy]
- **b.** $(x-2)(-x-9)$ [sz]
- **c.** $(x-2)(x-15)$ [hi]
- **d.** $-x+15$ [de]

9. Une factorisation de l'expression $4x^2 - (x+3)^2$, on obtient :

- **a.** $(x+3)(3x+3)$ [gh]
- **b.** $(x+1)(3x-9)$ [ak]
- **c.** $(x-3)(3x+3)$ [lm]
- **d.** $(3x-3)(5x+3)$ [lr]

10. En factorisant l'expression $3x(x-2) - (x-4)(x-2)$, on obtient :

- **a.** $(x-2)(2x+4)$ [ab]
- **b.** $(4x-4)(x-2)$ [os]
- **c.** $(4+2x)(x-2)$ [mn]
- **d.** $(x-2)(2x-4)$ [dh]

11. Soit l'expression $E = 9(x+1)^2 - 36$. E s'écrit aussi :

- **a.** $9x^2 + 18x - 27$ [qr]
- **b.** $9(x-5)(x+7)$ [kq]
- **c.** $(3x-3)(3x+9)$ [cd]
- **d.** $9(x-1)(x+3)$ [rw]

12. Soit l'expression $E = x^2 - 2x - 3$. E s'écrit aussi :

- **a.** $x(x-2)$ [qv]
- **b.** $x(x-2)+3$ [ry]
- **c.** $(x-1)^2 - 4$ [st]
- **d.** $(x+1)(x-3)$ [fg]

Recherche 1 - 4 **Trous remarquables**

Complète à l'aide des égalités remarquables :

$$\begin{aligned}
x^2 + \ldots + 100 &= (\ldots + \ldots)^2 \\
9x^2 + \ldots + \ldots &= (\ldots + 5)^2 \\
x^2 - \ldots &= (x+3)(\ldots - \ldots) \\
\ldots - 16 &= (5x + \ldots)(\ldots - \ldots) \\
\ldots - \ldots + 25 &= (3x - \ldots)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - 4x^2 &= (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) \\
64 + 48x + 9x^2 &= (\ldots + \ldots)^2 \\
121 - 4x^2 &= (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) \\
16x^2 - 8x + 1 &= (\ldots - \ldots)^2 \\
\ldots + 14x + \ldots &= (x + \ldots)^2
\end{aligned}$$

Recherche 1 - 5 a^2-b^2

1. Rappeller une égalité remarquable qui pourrait servir à répondre aux questions qui suivent.
2. Factoriser les expressions suivantes à l'aide de cette égalité remarquable.

$$\begin{aligned}
4 - t^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
16 - 9t^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
25z^2 - 1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x^2 - 25 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
81x^2 - 16 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-49 + 36x^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Recherche 1 - 6 La base

Dans chaque ligne du tableau suivant, 4 réponses sont proposées, mais une seule est exacte.
Entoure la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Expression	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(x-3)^2 =$	$x^2 - 6x + 9$	$x^2 - 9$	$x^2 - 12x + 9$	$x^2 + 6x + 9$
$(2x-5)^2 =$	$2x^2 - 25$	$2x^2 - 20x + 25$	$4x^2 - 20x + 25$	$4x^2 - 25$
$(x-5)(x+5) =$	$x^2 - 5$	$x^2 - 10x - 25$	$x^2 + 10x - 25$	$x^2 - 25$
$(x-1)(x+2) =$	$x^2 + x - 2$	$x^2 - 1$	$x - 2$	$x^2 - 2$
$(5x-3)^2 =$	$25x^2 - 9$	$5x^2 - 30x + 9$	$25x^2 - 30x + 9$	$5x^2 - 9$

Recherche 1 - 7 Dominos

Après avoir découpés les dominos ci-dessous, place les pour former un parcours rectangulaire en respectant la règle suivante : deux côtés qui sont adjacents doivent être égaux.

$x^2 - 10x + 25$	$x(x+5) - 4x$	$(1-2x)(2x+3)$	$15x - 9$
$(x+3)(x+5)$	$x^2 + 3x$	$x(x+3)$	$(1-2x)(5x-2) - (1-2x)(3x-5)$

$x(x-1)$	$x(x+1)$	$(1-2x)(8x-3)$	x^2-x
$3(5x-3)$	$(x-5)^2$	$4x(2x+7)$	$x^2+8x+15$
$(5-3x)(6-2x)$	$8x^2+14x$	$6x^2-28x+30$	$(1-2x)(5x+2)+(1-2x)(3x-5)$

Recherche 1 - 8 Ensembles de nombres

Répondre par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Un entier est positif.
2. Un entier n'est pas un décimal.
3. Un décimal est un rationnel.
4. Un quotient de deux nombres est un rationnel.
5. Un nombre peut être à la fois un entier naturel et un entier relatif.
6. 3 est un nombre rationnel.

Recherche 1 - 9 Ensembles de nombres

On considère tous les nombres compris entre -4 et 3 inclus.

1. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{N}$?
2. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Z}$?
3. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Q}$?
4. Citer un élément de cet intervalle qui soit entier non naturel.
5. Citer un élément de cet intervalle qui soit un rationnel non décimal.
6. Citer un élément de cet intervalle qui soit un réel mais pas un rationnel.

Recherche 1 - 10 Avec des racines

On donne un rectangle STUV dont les dimensions exactes en centimètres sont :

$$ST = L = 16+4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad TU = l = 16-4\sqrt{2}.$$

Calculer, en détaillant et en donnant les valeurs exactes des résultats :

1. Le périmètre P du rectangle $STUV$ en centimètres.
2. L'aire A du rectangle $STUV$ en centimètres carrés.
3. La longueur d de la diagonale du rectangle $STUV$ en centimètres.

Recherche 1 - 11 Ensembles de nombres

Compléter toutes les cases du tableau suivant par le symbole $\in$ ou $\notin$

	$\frac{35}{7}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	$1+2\sqrt{3}$	$-\frac{1+2}{3}$	$\frac{12}{7+5}$	$\sqrt{5^2-4^2}$	$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$	$\frac{341}{19}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{D}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{R}$										

Recherche 1 - 12 Avec des fractions

1. Montrer que $\sqrt{1+\frac{3}{5}} \times \sqrt{1-\frac{3}{5}}$ est rationnel.
2. Montrer que $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ et $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2$ sont des entiers.
3. Montrer que $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$ est un rationnel.
4. Plus généralement,montrer que les nombres $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ le sont aussi.

Recherche 1 - 13 Puissances de 10

Un fil de section S comporte n électrons par unité de volume se déplaçant à la vitesse v.
L'intensité I du courant circulant dans ce fil est donnée en ampère par la formule :

$$I = nSqv$$

où q désigne une charge électrique.

On donne :

$n = 6 \times 10^{26}\ m^{-3}$ $\qquad$ $v = 2 \times 10^{-3}\ m.s^{-1}$
$q = 1,5 \times 10^{-19}\ C$ $\qquad$ $S = 1,2 \times 10^{-6}\ m^2$.

1. Faire le calcul de I, en ampère, à l'aide de la calculatrice, et donner le résultat.
2. Faire le calcul à la main en détaillant les étapes.

Recherche 1 - 14 Fractions et racines

Écrire le nombre suivant sans radical au dénominateur : $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Recherche 1 - 15 Fractions

Écrire sous forme de fraction irréductible : $B = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$.

Recherche 1 - 16 Racines et machine

Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{8} + \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3} + 2\sqrt{27}$ et $BC = \frac{184\,148}{63\,217}$.

1. Donner à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} près de chacun des côtés.
2. Donner les valeurs exactes de AB^2, AC^2 et BC^2.
3. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Recherche 1 - 17 Machine

Soit x un nombre réel. On pose

$$A = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \qquad et \qquad B = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

1. Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées à 10^{-10} près de A et B pour :

$$x = 10^4 \qquad x = 10^{18} \qquad x = -3$$

2. Démontrer par le calcul que $A = B$.
3. Comment peut-on expliquer les résultats de la question **1.** ?

Recherche 1 - 18 Ensemble de nombres

Pour trouver la nature d'un nombre, on le simplifie au maximum pour trouver le plus petit ensemble auquel il appartient.
Déterminer la nature des nombres suivants :

$$A = \frac{-\sqrt{144}}{3}; \qquad B = \frac{\pi}{314}; \qquad C = \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{45}; \qquad D = \left(5\sqrt{3}+2\right)^2 - 20\sqrt{3}$$

$$E = \frac{\pi}{3} \div \frac{\pi}{11}; \qquad F = 5,3939\overline{39}\ldots; \qquad G = 5,37 - 11,6$$

Recherche 1 - 19 Écritures scientifiques

1. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :
   i. $H = 4,5 \times 10^5 \times 6,4 \times 10^4$;
   ii. $I = -2,45 \times 10^{-4} + 54,7 \times 10^{-4}$;
   iii. $J = \frac{4,8 \times 10^{-11} \times 27 \times 10^5}{1,2 \times 10^{-3}}$
2. La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^8 m/s. La distance moyenne entre la Terre et le Soleil est d'environ $149 \times 10^6 km$. Calculer le temps mis par un rayon lumineux du Soleil pour atteindre la Terre.

Recherche 1 - 20 Calcul littéral

1. Développer et réduire l'expression $(n+1)^2 - n^2$.
2. En déduire que tout nombre entier impair est la différence de deux carrés.
3. Trouver une différence de deux carrés égale à 13, puis une autre égale à 45.

Recherche 1 - 21 Racines et fractions

Montrer les égalités suivantes :

1. $\frac{1\,000+0{,}000\,03^2-10^3}{6\times10^{-9}} = 0{,}15$
2. $16-\left(\sqrt{3}-5\right)^2 = \left(9-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$
3. $\frac{5-\sqrt{2}}{23} = \frac{1}{5+\sqrt{2}}$
4. $\frac{\sqrt{5}+1}{5+\sqrt{5}} + 7\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}$

Recherche 1 - 22 Identités à remarquer

Développer et réduire :
$A=(4-\sqrt{5})^2$ $B=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ $C=(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})$ $D=(4\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})$
Factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=64x^2-49$
$B(x)=21x^2-14x$
$C(x)=4x^2-4x+1$
$D(x)=(4x-3)^2-25$
$E(x)=4(x-1)^2-2(x-1)(x+3)$
$F(x)=4(x-2)^2-16$
$G(x)=(5x+3)^2-(6x-2)^2$

Recherche 1 - 23 Fractions

Déterminer les constantes a, b et c tels que : $\dfrac{6x^2-x+4}{2x-3} = ax+b+\dfrac{c}{2x-3}$.

Recherche 1 - 24 Fractions irréductibles

Exprimer chacun des nombres a, b, c et d sous forme d'une fraction irréductible en faisant apparaître les étapes du calcul :

$a = \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\div\frac{5}{2}$

$b = \frac{13\times10^{14}\times10^6}{2\times(10^3)^7}$

$c = \sqrt{\dfrac{49}{100}} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{10}$

$d = \frac{1}{20}\left(\sqrt{14}-1\right)\left(\sqrt{14}+1\right)$

Recherche 1 - 25 Somme ou produit ?

Parmi les expressions suivantes, indiquer les sommes, les produits et les quotients.

$A(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$ $B(x)=\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{1}{4}$ $C(x)=\dfrac{4x}{3}(x-2)$
$D(x)=(5x-1)^2$ $E(x)=(x-3)2x+7$ $F(x)=3x(x+1)$

NB : on fera des phrases du type : « $G(x)$ est le produit de $(x+7)$ par $(x-3)$. »

Recherche 1 - 26 Identités remarquables

Retrouver parmi les expressions suivantes celles qui correspondent à des développements de carrés :

$A(x)=x^2+2x+1$ $B(x)=4x^2-4x+1$

$C(x)=x^2+3x+9$ $D(x)=4x^2+12x+9$

Recherche 1 - 27 Calculs

Soit l'expression $f(x)=-x^2+\dfrac{6}{x}$.

Calculer l'expression pour les valeurs suivantes :

- $x = 3$;
- $x = -2$;
- $x = \sqrt{3}$;
- $x = \dfrac{3}{2}$.

Recherche 1 - 28 Expressions déguisées

Vérifier que les trois expressions suivantes correspondent à une même expression :

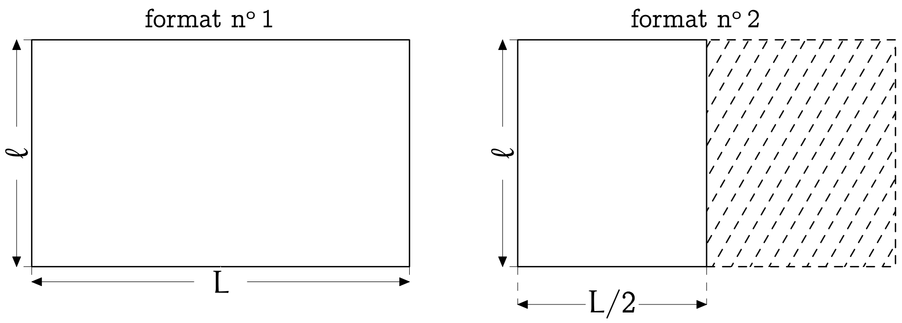
$$x(2x-1)-3\ ; \qquad (2x-3)(x+1)\ ; \qquad 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

Recherche 1 - 29 Calculs avec des racines

1. Vérifier les égalités suivantes : $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5}-2$ et $\sqrt{11-6\sqrt{6}} = 3-\sqrt{2}$.
2. Calculer : $A = 3\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + 2\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2} - \sqrt{11-6\sqrt{6}} = 3-\sqrt{2}$.

Recherche 1 - 30 Formats de papiers

L'Organisation Internationale de Normalisation (ISO) constitua en 1947 un Comité Technique, le ISO/TC 6 « papier », qui chargea un de ses sous-comités d'étudier les dimensions internationales des papiers et des cartons. La recommandation fut demandée d'envisager la normalisation des formats.
Afin d'obtenir des formats pratiques, il fût décidé que, lors de pliages en deux de la feuille, le rapport longueur sur largeur de la feuille devait rester constant.



$$\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}}$$

1. Quelle est alors le lien entre L et ℓ ?
2. Comment passer d'un format n° 2 au format n° 1 ?
3. Le format de départ est le format A_0 d'aire exactement 1 m^2 et qui mesure environ 118,9 cm sur 84,1 cm. Trouve les dimensions des feuilles de format A_1, A_2, A_3 et A_4.

6 Et les 2^{nde}5 créèrent les nombres

6 1 Arbre de calcul

Le rôle des parenthèses est le plus souvent primordial dans un calcul et ne facilite pas sa compréhension.
Par exemple, il ne faudra pas confondre :

$$9/2+(-3)\times 4-(-5)$$

et

$$9/((2+(-3))\times(4-(-5)))$$

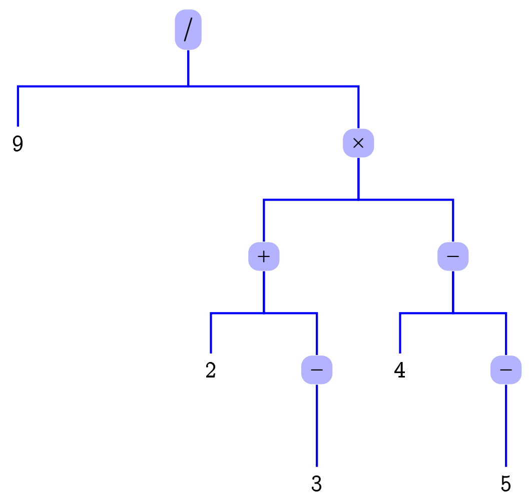
Par exemple sur Python :

```
In [1]: 9 / 2 + (-3) * 4 - (-5)
Out[1]: -2.5

In [2]: 9 / ((2 + (-3)) * (4 - (-5)))
Out[2]: -1.0
```

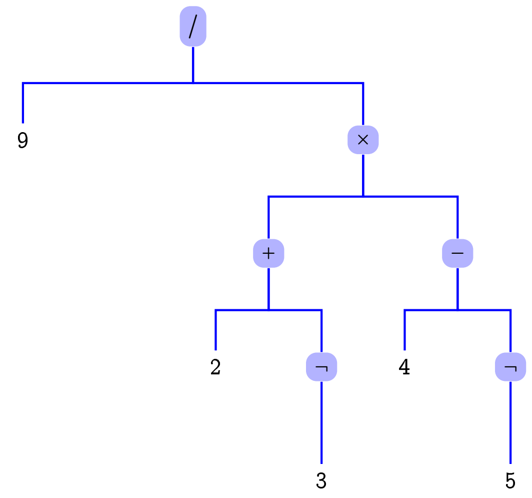
Interressons-nous par exemple à $9/((2+(-3))\times(4-(-5)))$. Il n'est pas évident de voir qu'il s'agit de la division de 9 par le produit de la somme de 2 et de l'opposé de 3 par la différence de 4 et de l'opposé de 5...
Il n'est pas évident de comprendre cette longue phrase non plus !
On peut faire une mixture de ces deux modes en utilisant des noms d'opérateurs et des parenthèses. Par exemple, on importe ces noms dans Python et on effectue le calcul ainsi :

```
In [3]: from operator import add, mul, inv, neg, pow, sub, truediv, floordiv

In [4]: truediv(9, mul(add(2, neg(3)), sub(4, neg(5))))
Out[4]: -1.0
```

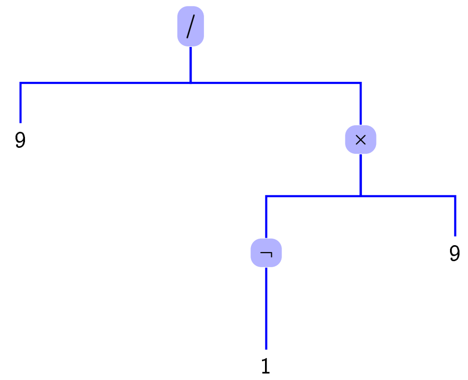
Il est sûrement plus clair de visualiser le calcul à l'aide d'un arbre :



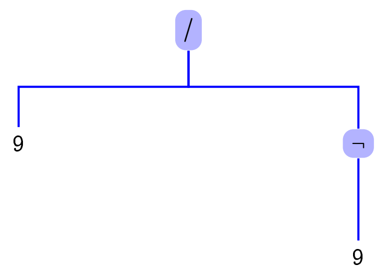
L'usage du − est ici ambigu : cet opérateur est parfois binaire pour la soustraction, parfois unaire pour prendre l'opposé. Pour éviter ce problème, on peut par exemple utiliser des symboles différents. On prendra − pour la soustraction et ¬ pour l'opposé :



On réduit alors l'arbre en remontant des feuilles vers la racine :



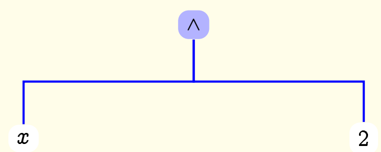
puis



et on trouve bien finalement ¬1.

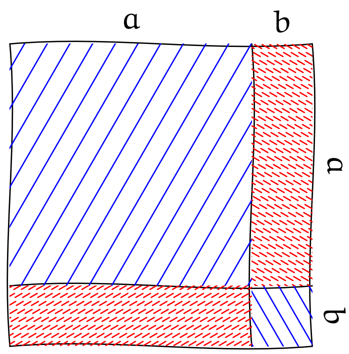
Recherche

Construisez les arbres des expressions des questions 1, 2, 6a, 6b, 6c, 6d de la Recherche 1 - 3 page 11. Pour la puissance on fera (par exemple pour x^2) :



6 2 Identités remarquables

Tout est dans le dessin :



Ce qui signifie que :

Théorème 1 - 1

Identité remarquable neumebeurre oine

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

En prenant $b = \neg c$, on obtient $a^2 + 2a(\neg c) + (\neg c)^2 = (a + (\neg c))^2$.
Or $2 \times a \times (\neg c) = \neg 2ac$ et $(\neg c)^2 = c^2$ donc cela revient à $a^2 + (\neg 2ac) + c^2 = (a + (\neg c))^2$.
Enfin ajouter l'opposé d'un nombre c'est le soustraire donc $a + (\neg c) = a - c$.
Finalement :

Théorème 1 - 2

Identité remarquable neumebeurre tou (en fait la première suffit)

$$a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$$

La troisième est trop facile : $(x+y)(x-y) = (x+y)\times(x+(\neg y)) = x\times x + x\times(\neg y) + y\times x + y\times(\neg y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$

Théorème 1 - 3

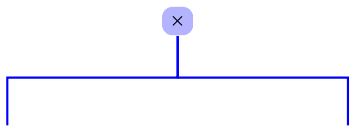
Identité remarquable neumebeurre tri

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

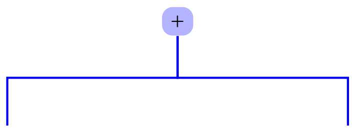
À chaque fois, de droite à gauche on effectue un **développement** (on enlève les enveloppes : les parenthèses) et de gauche à droite on effectue une **factorisation**.

— **développement** : produit devient somme

— **factorisation** : somme devient produit



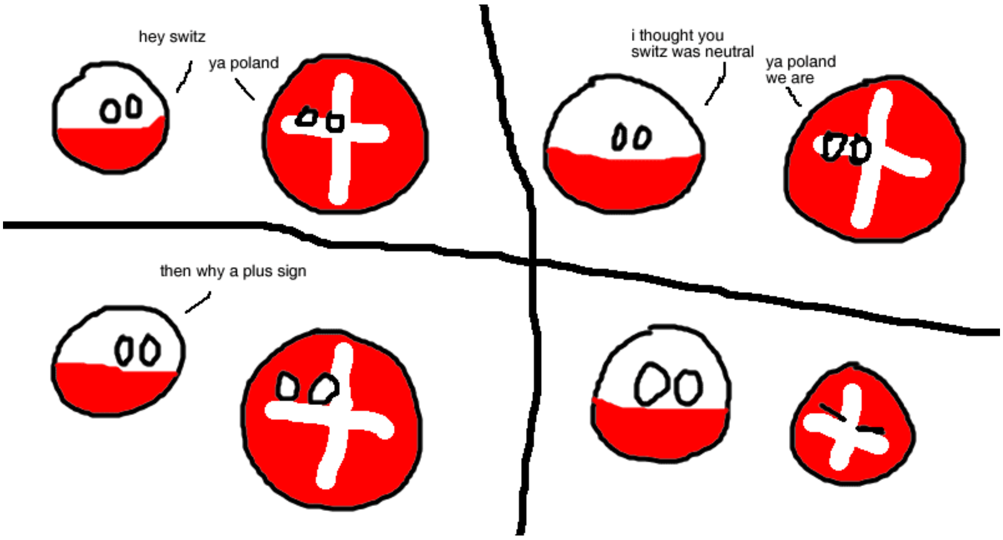
devient



et vice-versa.

6 3 Opposé - Inverse : la recherche du neutre

6 3 1 Déplacement neutre



La nature recherche souvent l´équilibre. Imaginez par exemple un lac abrité, sans vent. L'eau est calme, horizontale, lisse, équilibrée.
Imaginez maintenant que vous y lanciez un objet. Cela va créer des remous mais le lac va tout faire pour retrouver sa position neutre.

Considérez maintenant l'**addition** comme un **déplacement**. Ajouter 4 c'est déplacer un nombre de 4 unités. Ajouter 57 c'est déplacer un nombre de 57 unités.
Y a-t-il un déplacement qui ne déplace rien...un déplacement neutre ?

Oui, bien sûr, le déplacement de **zéro**. Ajouter zéro à un nombre ne change rien.
Quelque soit votre nombre :

$$\text{nombre} + 0 = \text{nombre}$$

Définition 1 - 1

Élément neutre de l'addition
L'élément neutre de l'addition est ZÉRO :

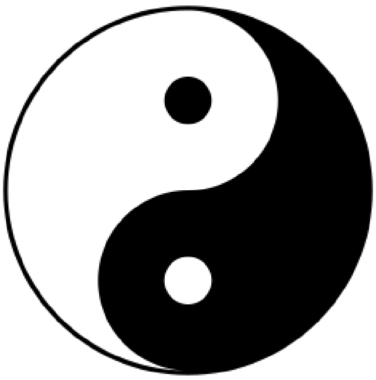
$$\text{nombre} + 0 = 0 + \text{nombre} = \text{nombre}$$

Recherche

On dit **L**'élément neutre mais peut-il y en avoir plusieurs pour l'addition ? Supposez par exemple qu'il en existe un deuxième. Appelons-le ♡. Que se passe-t-il ? Y a-t-il un problème ? Menez l'enquête.

6 3 2 Retour à l'équilibre

La nature cherche à revenir à l´équilibre.



Si l'on s'est déplacé de 4 unités, il existe un chemin qui permet de revenir à la position de départ : le chemin **opposé**.

Définition 1 - 2

Opposé d'un nombre
L'opposé d'un nombre n est le nombre qu'il faut additionner à n pour revenir à 0 (l´équilibre).
On le note $\neg n$ ou $-n$. Sur les calculatrices on utilise la touche (−)

6 3 3 Agrandissement-Réduction

On peut penser à la multiplication comme une mise à l´échelle. Multiplier par 3 c'est agrandir un nombre d'un facteur 3.
Le déplacement neutre, c'est donc l´échelle 1 cette fois.

Définition 1 - 3

Élément neutre de la multiplication
L'élément neutre de la multiplication est UN :

$$\text{nombre} \times 1 = 1 \times \text{nombre} = \text{nombre}$$

Ça ressemble à la définition du neutre de l'addition...
De même on cherchera à revenir à la taille initiale. Si on a mis à l'échelle 3, il existe une échelle pour revenir à la taille initiale : l'échelle **inverse**.

Définition 1 - 4

Inverse d'un nombre
L'inverse d'un nombre n est le nombre qu'il faut multiplier à n pour revenir à 1 (l´équilibre).
On le note $\frac{1}{n}$ ou n^{-1}. Sur les calculatrices on utilise les touches SHIFT x^{-1})

6 4 Équations : la recherche de l'équilibre

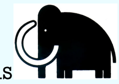
Au début, l'homme s'amusait avec les os :

puis il a eu l'idée que ça pouvait l'aider à compter ses mammouths :

C'est une idée assez naturelle : on appelle les nombres servant à compter les mammouths les **nombres entiers naturels**.

Définition 1 - 5

Entiers naturels

Les entiers naturels sont les nombres qui permettent de compter les mammouths .
On note souvent **N** ou $\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les nombres entiers Naturels.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$$

Dans $\mathbb{N}$ je peux résoudre des problèmes de mammouths :

> *Je viens d'attraper 4 mammouths. J'en ai maintenant 9. Combien en avais-je au départ ?*

Pour cela l'homme préhistorique mit au point la résolution d'équations dans $\mathbb{N}$. Il se dit :

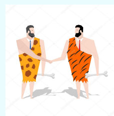
> *Soit m le nombre de mammouths au départ. Alors je cherche un entier naturel m tel que $m + 4 = 9$.*
> *En fait je cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $m + 4 = 9$ d'inconnue m.*

Quel entier naturel faut-il ajouter à 4 pour trouver 9 : ben 5. J'ai résolu mon **équation** dans $\mathbb{N}$. La **solution** est 5.

Puis l'être humain s'est mis à s'endetter en empruntant des mammouths à ses voisins. Pour ne pas confondre le fait d'attraper ou d'emprunter un mammouth, il nota le fait d'en emprunter douze : -12. Ces nouveaux nombres sont définis *relativement* à leur propriétaire.

Définition 1 - 6

Entiers relatifs

Les entiers relatifs sont les nombres qui permettent d'emprunter des mammouths .
On note souvent **Z** ou $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs : les Zentiers.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$$

Quel grand pas pour l'humanité. L'être humain peut maintenant s'endetter et résoudre de nouveaux problèmes :

> *J'ai attrapé 12 mammouths ce matin. Il ne m'en reste plus. Combien en avais-je emprunté au départ ? Je cherche le nombre m de mammouths qui vérifie $m + 12 = 0$.*

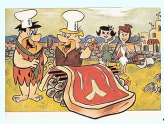
Je ne savais pas résoudre l´équation dans $\mathbb{N}$: si j'attrape 12 nouveaux mammouths, je ne peux pas en avoir aucun. Mais je peux le faire dans $\mathbb{Z}$: je peux avoir emprunté des mammouths :

$$m + 12 = 0 \iff m = -12$$

Puis l'être humain s'est mis à partager ses mammouths.

Définition 1 - 7

Nombres rationnels

Les rationnels sont les nombres qui permettent de partager des mammouths .
On note souvent **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont en fait le Quotient de deux nombres zentiers.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$

On peut partager les mammouths mais aussi les dettes entre un certain nombre de personnes mais il faut qu'il y ait au moins quelqu'un.
Je ne savais pas résoudre l´équation dans $\mathbb{Z}$: si j'ai 3 mammouths, comment les partager équitablement avec mes quatre copains. Mais je peux le faire dans $\mathbb{Q}$: je peux avoir des fractions de mammouths :

$$3pm = 5 \Longleftrightarrow pm = \frac{5}{3}$$

Chaque copain aura la même part de mammouth : trois cinquièmes de mammouths.

Puis l'être humain s'est mis à mettre ses mammouths dans des enclos.

Je veux enfermer mon mammouth dans un enclos en forme de triangle rectangle dont les deux côtés orthogonaux ont pour longueur 1. Quelle est la longueur du troisième côté ?

On est donc amené à résoudre l'équation $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$: on cherche un nombre dont le carré vaut 2...Notons $\sqrt{2}$ un tel nombre.
Alors mon équation devient :

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ x^2 - (\sqrt{2})^2 &= 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

et donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = \neg\sqrt{2}$. Si un tel nombre existe, son opposé aussi est une solution du problème. Or ce nombre existe puisque j'ai construit mon enclos.
Pour ne pas confondre les deux solutions, on dira que :

Définition 1 - 8

Racine carrée
L'unique solution POSITIVE de l'équation $x^2 = a$ (qui n'a de sens que si a est positif car c'est la longueur d'un côté de mon enclos) est le nombre appelé *racine carrée de a* et noté $\sqrt{a}$.

Sur les calculatrices on utilise les touches SHIFT $\sqrt{}$ x^2

Garder ses mammouths laissa à l'être humain le temps de penser et d'inventer la poésie. En son honneur, le grand poète Jean RACINE écrivit ces vers inoubliables :

ALEXANDRINS
Proposition. La racine carrée de deux,
est un nombre irrationnel. Pour vous, c'est un jeu
de démontrer habilement cette assertion.
Si ce nombre mystérieux est une fraction,
p/q, p, q deux entiers premiers entre eux,
vous prenez le carré. En restant scrupuleux,
vous constatez après quelques cogitations
que p est pair, entrevoyez la solution :
q est pair aussi. Contradiction... Vous aimez
ces mathématiques antiques et vous rêvassez
lorsqu'Euclide d'Alexandrie fait irruption,
le regard pétillant, le sourire radieux.
Il relit votre texte avec application
et approuve l'argument d'un clignement d'yeux.

Recherche

Comment utiliser ce poème pour vous aider à démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ?

Il y a d'autres nombres qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$. Un très célèbre est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. On l'appelle π pour penser au périmètre et aux Grecs. Tiens, il y a quelque chose de bizarre dans la phrase précédente : quoi donc ?

Définition 1 - 9

Nombres réels
On dispose déjà de tous les nombres de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Quand on ajoute à ces nombres tous ceux que l'on peut construire dans des figures géométriques on forme l'ensemble $\mathbb{R}$ ou **R** des nombres Réels.

7 Puissances

7 1 Et l'être humain créa la multiplication

L'être humain savait depuis longtemps ajouter des mammouths :

> *2 mammouths plus 2 mammouths plus 2 mammouths ça fait 3 fois 2 mammouths*

Tout naturellement il venait d'inventer la *multiplication*.

Définition 1 - 10

Multiplication
Multiplier un nombre x par l'entier naturel n c'est ajouter x n fois.

$$x \times n = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}}$$

Ainsi

$$(x \times n) + (x \times p) = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ termes}} + \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ termes}} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n+p \text{ termes}}$$

...on vient de créer la FACTORISATION par un nombre :)

$$(x \times n) + (x \times p) = x \times (n + p)$$

7 2 Et l'être humain créa la puissance

2 fermes fois 2 enclos fois 2 mammouths ça fait 2^3 mammouths

Tout naturellement il venait d'inventer la *puissance*.

Définition 1 - 11

Puissance

Élever un nombre x à la puissance entière positive non nulle n c'est multiplier x n fois.

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

Ainsi

$$(x^n) \times (x^p) = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n+p \text{ facteurs}}$$

On vient d'inventer la règle de multiplication des puissances de x :

Théorème 1 - 4

Produit de puissances

$$x^n \times x^p = x^{n+p}$$

Toujours plus fort :

$$(x^n)^p = \underbrace{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}} \times \cdots \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \times p \text{ facteurs}}$$

On vient d'inventer la règle des puissances de puissances de x :

Théorème 1 - 5

Puissance de puissances

$$(x^n)^p = x^{n \times p}$$

Rappelez-vous ! On avait noté l'inverse d'un nombre x : x^{-1}.

Définition 1 - 12

Puissance -1

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Allez, on regarde si ça peut nous permettre d'inventer de nouvelles règles...

$$1 = x \times \frac{1}{x} = x^1 \times x^{-1} = x^{1-1} = x^0$$

Donc on vient d'inventer la puissance nulle :

Théorème 1 - 6

Puissance nulle

$$x^0 = 1$$

Ne nous arrêtons pas là !

$$1 = x \times \frac{1}{x} \times x \times \frac{1}{x} \times \cdots = (x \times x \times \cdots) \times \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots\right) = x^p \times \left(\frac{1}{x}\right)^p = x^p \times (x^{-1})^p = x^p \times x^{-p} = x^{p-p} = x^0$$

donc c'est bien compatible !

Théorème 1 - 7

Puissance négative

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p}$$

Toujours plus fort : peut-on imaginer une puissance telle que $x^p = \sqrt{x}$?
Cela signifie que $x = (x^p)^2 = x^{2p}$ donc $1 = \frac{x^{2p}}{x} = x^{2p-1} = x^0$
$2p - 1 = 0$...On pose donc $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$!

Théorème 1 - 8

Puissance rationnelle

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

THÈME N° 2

Un peu de géométrie de collège

Petit résumé de ce que vous êtes censés maîtriser en venant du collège

1 Droites remarquables du triangle

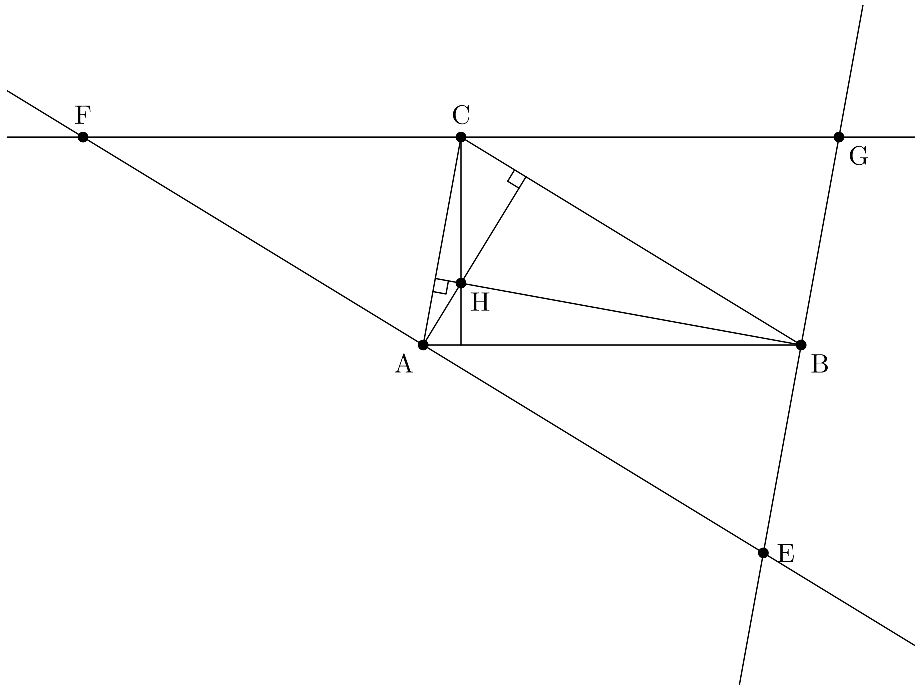
1 1 Souvenirs

1 1 1 Médiatrices

1. Que savez-vous sur les 3 médiatrices d'un triangle ?

2. Quel objet mathématique ces 3 médiatrices permettent-elles de construire ?

1 1 2 Hauteurs



Soit ABC un triangle quelconque et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC. Les droites (EF), (FG) et (GE) sont parallèles respectivement à (BC), (BA) et (AC).

1. Combien pouvez-vous citer de hauteurs dans le triangle ABC ?

2. i. Quelle est la nature des quadrilatères $EACB$ et $AFCB$? Justifiez.

   ii. Déduisez-en alors la position particulière du point A sur le segment $[EF]$.

   iii. Que pouvez-vous dire de la droite (AH) et du segment $[EF]$? Justifiez.

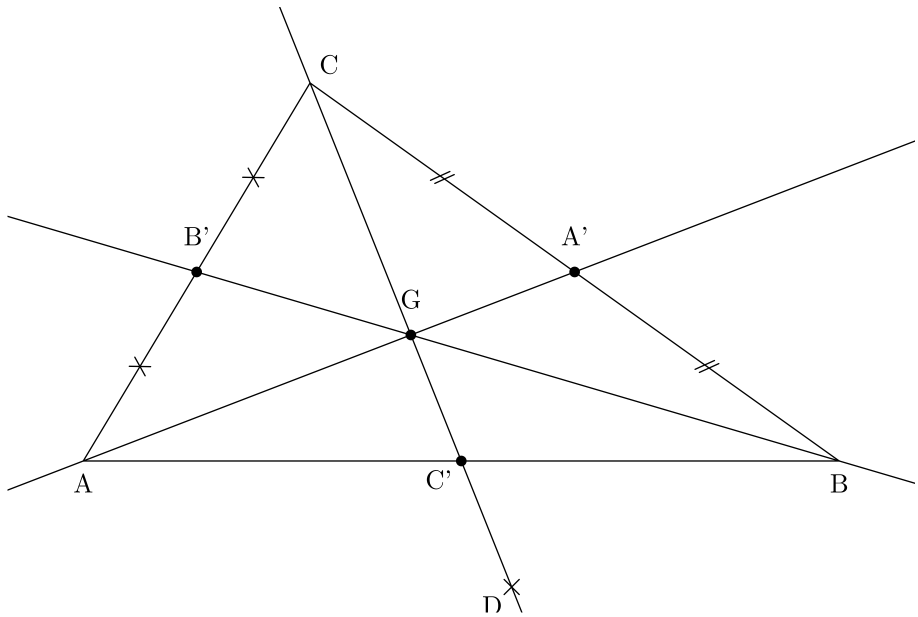
3. Que pouvez-vous dire de la droite (BH) et du segment $[EG]$? Justifiez.

4. Que pouvez-vous dire de la droite (CH) et du segment $[FG]$? Justifiez.

5. Que représente alors la droite (CH) pour le triangle ABC ? Justifiez.

6. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

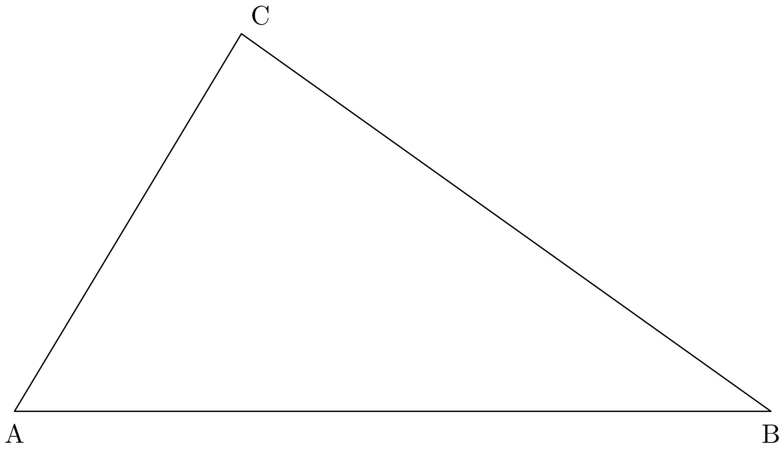
1 1 3 Médianes



Soit ABC un triangle quelconque et A', B' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. Soit G le point d'intersection des droites (AA') et (BB') et D le symétrique de C par rapport à G. Soit C' le point d'intersection des droites (CG) et (AB).

1. Dans un triangle, on appelle **médiane** une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.
   Combien pouvez-vous citer de médianes dans le triangle ABC ? Justifiez.
2. i. Quelle est la nature du quadrilatère $AGBD$? Justifiez.
   ii. Déduisez-en alors la position du point C' sur le segment $[AB]$.
3. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

1 1 4 Bissectrices



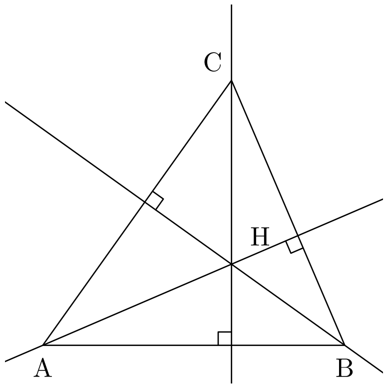
Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construisez les bissectrices des ansgles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$. Que remarquez-vous ? [a]
2. Soit I le point d'intersection des bissectrices. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par I coupe la droite (AB) en P.
   Tracez le cercle de centre I et de rayon IP. Que remarquez-vous ?

a. On admettra ce résultat dans le cours.

2 Le Cours

2 1 Hauteurs



Définition 2 - 1

Hauteurs d'un triangle

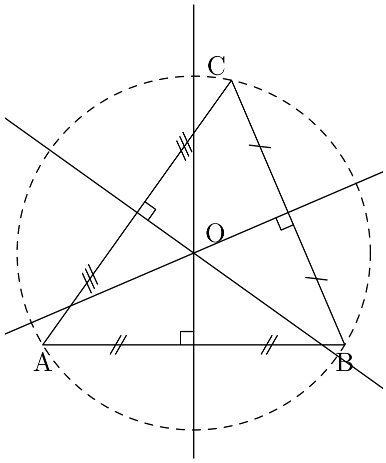
Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.
Dans le triangle ABC, si la hauteur passe par le sommet A on dit alors hauteur issue de A.

Théorème 2 - 1

Orthocentre

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle

2 2 Médiatrices



Définition 2 - 2

Médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Les médiatrices dans un triangle sont donc les médiatrices des côtés de ce triangle.

Théorème 2 - 2

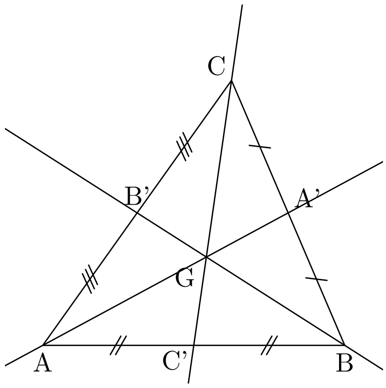
M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$ si, et seulement si M est équidistant de A et de B c'est à dire $MA = MB$.

Théorème 2 - 3

Centre du cercle circonscrit

Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes en un point O appelé centre du cercle circonscrit au triangle.

2 3 Médianes



Définition 2 - 3

Médianes d'un triangle

Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

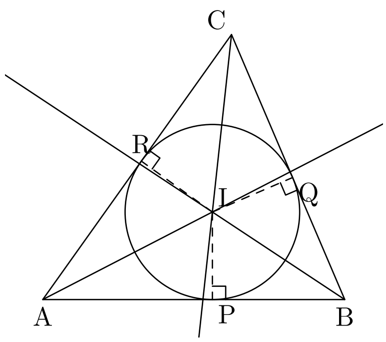
Théorème 2 - 4

Centre de gravité

Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle.

De plus, on a $AG = \frac{2}{3}AA'$, $BG = \frac{2}{3}BB'$, $CG = \frac{2}{3}CC'$

2 4 Bissectrices



Définition 2 - 4

Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure. C'est également l'axe de symétrie de cet angle.

Théorème 2 - 5

Cercle inscrit

Dans un triangle, les bissectrices sont concourantes en un point I appelé centre du cercle inscrit au triangle.

De plus, $IP = IQ = IR$

3 Cercle dont le diamètre est un des côtés d'un triangle inscrit dans ce cercle

On considère le triangle ABC où le cercle (C) est le cercle circonscrit du triangle ABC. On a donc

$$OA = OB = OC.$$

Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature du triangle ABC ?

Répondre aux questions suivantes pour vérifier la conjecture.

1. i. Quelle est la nature du triangle AOB ?
   ii. Que peut-on en déduire sur la mesure de l'angle $\widehat{ABO}$ en fonction des données de la figure ?
2. i. Quelle est la nature du triangle AOC ?
   ii. Que peut-on en déduire sur la mesure de l'angle $\widehat{ACO}$ en fonction des données de la figure ?
3. i. Quelle est la mesure en degrés de la somme des angles d'un triangle ?
   ii. Exprimer la somme des angles du triangle ABO en fonction des mesures x et y.
   iii. En déduire la mesure exacte en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Écrire ci-dessous la propriété que nous venons de justifier.

Théorème 2 - 6

Triangle inscriptible dans un cercle

Exercices

Recherche 2 - 1

1. Construisez un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construisez le symétrique L du point A par rapport au point M.
2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifiez la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire qu point J ? Pourquoi ?

Recherche 2 - 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

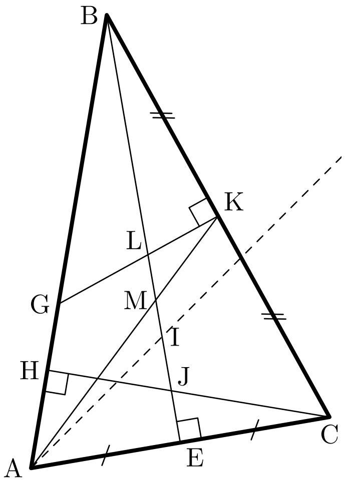
1. i. Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifiez.
   ii. Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifiez.
2. Démontrez que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

Recherche 2 - 3

Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. i. Quelle est la nature du quadrilatère $EDFC$? Justifiez.
   ii. Démontrez que la droite (DC) est à la fois une médiane du triangle ABC et du triangle EFD.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontrez que G est aussi le centre de gravité du triangle EFD.

Recherche 2 - 4



Le triangle ABC est <u>**isocèle**</u> **en B**. Complétez les phrases suivantes : ⋆⋆resume=⋆,,⋆

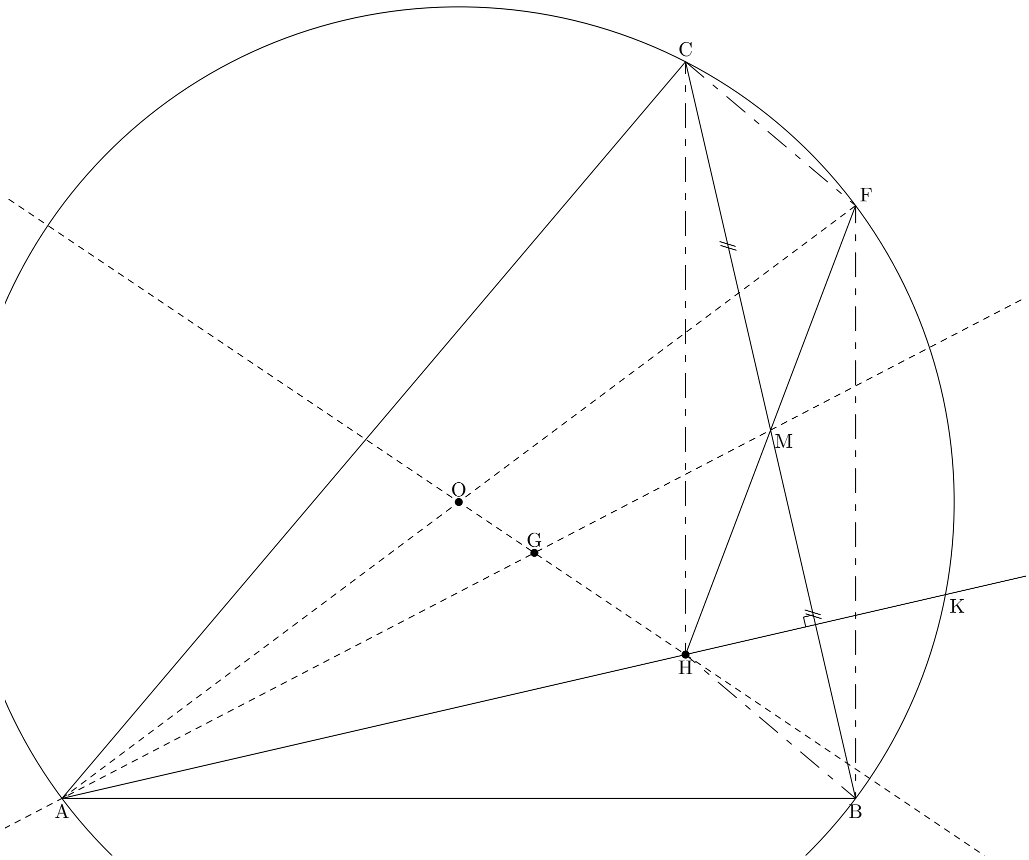
1. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point L.
2. Le centre du cercle inscrit au triangle ABC est le point I.
3. L'orthocentre du triangle ABC est le point J.
4. Le centre de gravité du triangle ABC est le point M.
5. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est LA, LB ou LC.
6. Un rayon du cercle inscrit au triangle ABC est IE.
7. La distance du point L à la droite (BC) est la longueur LK.
8. La distance du point L à la droite (AC) est la longueur LE.
9. La distance du point J à la droite (AB) est la longueur JH.
10. La distance du point J à la droite (AC) est la longueur JE.

Recherche 2 - 5

Pour chacune des questions suivantes, entourez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

①	Pour obtenir le centre du cercle circonscrit à un triangle, suffit-il de tracer les médiatrices de deux cotés du triangle ?	oui	non	on ne sait pas
②	Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle principal et la médiatrice de la base sont-elles confondues ?	jamais	toujours	parfois
③	Le centre du cercle inscrit à un triangle est-il à l'intérieur du triangle ?	jamais	toujours	parfois
④	L'orthocentre d'un triangle est-il à l'intérieur du triangle ?	jamais	toujours	parfois
⑤	Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur la médiane	au tiers en partant du sommet	aux deux tiers en partant du sommet	au tiers en partant du milieu du coté

Recherche 2 - 6 **Droite d'Euler**



Construction

1. Soit ABC un triangle supposé non équilatéral.
2. Soit O le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
3. Soit F le point diamètralement opposé à A.
4. Soit K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle (C)
5. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
6. Soit H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
7. Soit G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

Démonstration

1. Montrez que les triangles AFK et AFC sont rectangles.
2. i. Montrez que la droite (OM) est la médiatrice du segment $[BC]$.
   ii. Montrez que les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
3. i. Montrez que M est le milieu du segment $[HF]$.
   ii. Montrez que le quadrilatère $BHCF$ est un parallélogramme.
4. i. Montrez que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
   ii. Montrez que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. i. Montrez que G est le centre de gravité du triangle AHF.
   ii. Quelle est la position remarquable de G sur le segment $[OH]$?
   iii. Montrez que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

Recherche 2 - 7 Cercle d'Euler

Construction

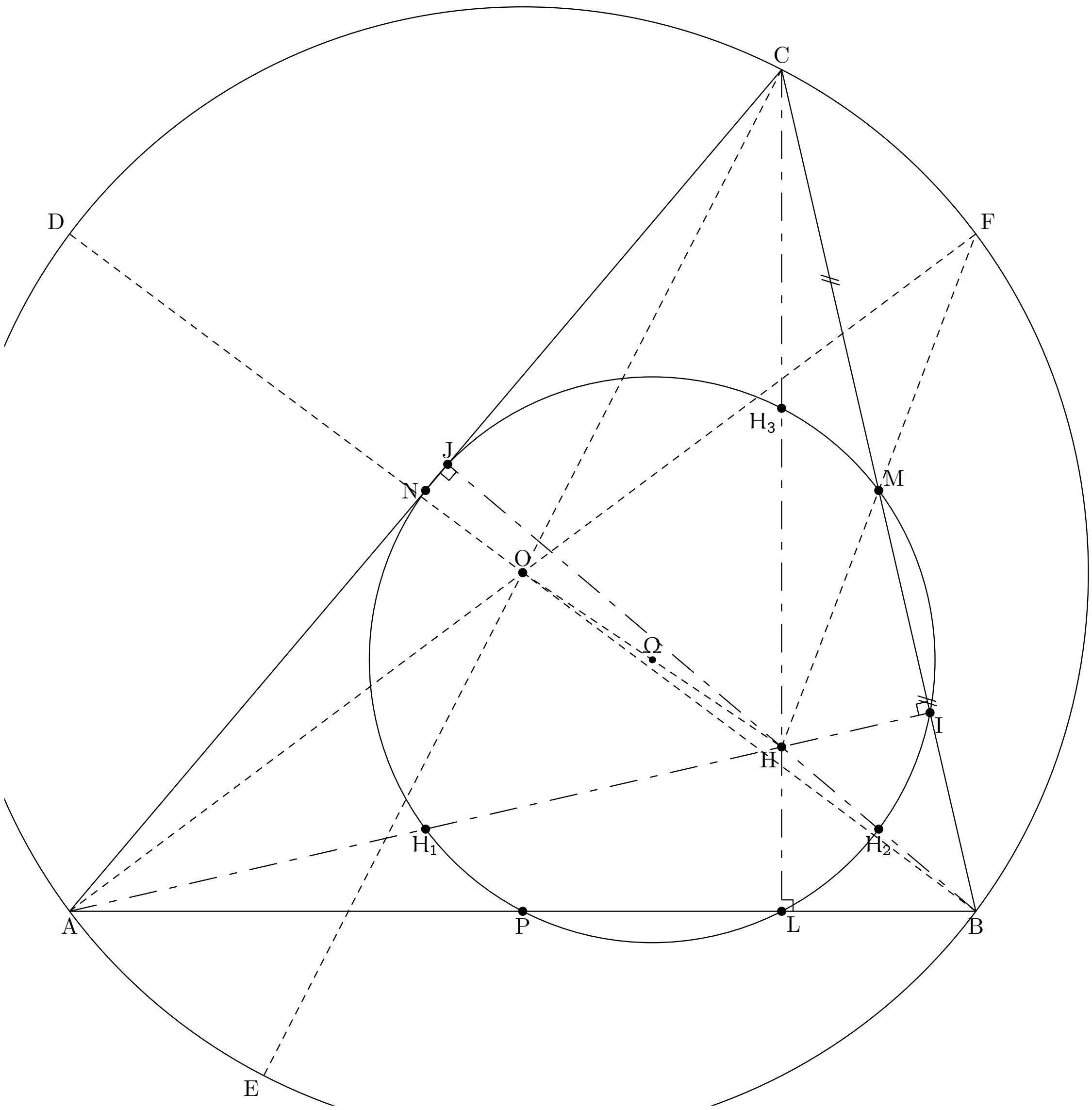
1. On reprend la construction précédente.

2. On appelle Ω le milieu du segment $[OH]$; N et P les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$; D et E le symétriques respectifs de B et C par rapport à O ; I, J, L les points d'intersection respectifs entres la hauteur issue de A et la droite (BC), la hauteur issue de B et la droite (AC), la hauteur issue de C et la droite (AB) ; H_1, H_2, H_3 les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

Démonstration

Démontrez que les points M, N, P, I, J, L, H_1, H_2 et H_3 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Indication : *On cherchera par expérimentation quel pourrait être le centre de ce cercle et on déterminera ensuite la valeur du rayon à l'aide d'un des points.*
Restera ensuite à prouver que tous les autres points donnent la même valeur du rayon.
Chose « simple » pour les points M, N, P, H_1, H_2, H_3.
Pour le point I, on pourra considérer la parallèle à la droite (AH) passant par Ω et démontrer qu'elle coupe le segment $[IM]$ en son milieu.



Recherche 2 - 8 Triangle et cercle

Dans ce problème, on donnera les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

— $[AB]$ est un segment tel que $AB = 14$ cm.

— H est le point de $[AB]$ tel que $AH = 6$ cm.

— La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en C.

— On appelle O le centre du cercle.

1. Tracer la figure en vraie grandeur, et la compléter par la suite.

2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

3. Calculer la valeur exacte de la longueur CH.

4. Calculer la valeur exacte de la longueur AC.

5. En déduire finalement par le calcul que $BC = 4\sqrt{7}$ cm.

6. On s'intéresse au triangle COB, et on appelle H_1 le pied de la hauteur issue de O.

   i. Calculer l'aire du triangle COB. Donner le résultat sous la forme $e\sqrt{3}$ où e est un entier.

   ii. Calculer la valeur exacte de la longueur OH_1.

