Fiche d'exercices n°2 - Un peu d'ordre - $2^{\text{nde}}12$

Exercice 1

Comparer les nombres suivants en utilisant la méthode vue en cours :

1. $12x^2+7$ et $6x^2+5$;

2. $5x+7$ et $-3+5x$;

3. $\frac{12}{7}$ et $\frac{7}{4}$;

4. $\frac{127}{57}$ et $\frac{48}{57}$;

5. $\frac{9,01}{10^{53}}$ et $\frac{90,11}{10^{54}}$;

6. $\frac{10^{35}}{10,01}$ et 10^{34} ;

Exercice 2

Soient x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x < y$. Comparer les nombres suivants en précisant à chaque étape la propriété utilisée :

1. $7x-5$ et $7y-5$;

2. $-5x+4$ et $-5y$;

3. $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$;

4. $\frac{7}{x}$ et $\frac{7}{y}$;

5. x^2-1 et y^2-1 ;

6. $\frac{-3x}{13}$ et $\frac{-3y}{13}$;

7. $\frac{7x}{4}-5$ et $\frac{7y}{4}+1$;

8. $\frac{-15x}{7}$ et $\frac{-15y-8}{7}$;

Exercice 3

Soit a un nombre positif. Le but de cet exercice est de comparer a, a^2 et a^3. Nous commencerons par observer quelques exemples avant de démontrer la règle générale.

1. Ordonner a, a^2 et a^3 pour les valeurs de a suivantes : $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,5$; $a_3 = 1$; $a_4 = 5$; $a_6 = 12$.
2. Les réponses sont-elles les mêmes pour toutes les valeurs précédentes ? Autour de quelle valeur de a y a-t-il un changement ?
3. On suppose $a > 1$. En utilisant un critère adapté, ordonner a et a^2, puis a^2 et a^3.
4. On suppose cette fois-ci $a < 1$. En utilisant un critère bien adapté, ordonner a et a^2, puis a^2 et a^3.
5. Que se passe-t-il pour $a = 1$? En déduire la règle générale sur l'ordre de a, a^2 et a^3.

Exercice 4

Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui définissent des intervalles de $\mathbb{R}$? Donner, quand cela est possible, la notation correspondante.

1. Tous les nombres réels strictement plus petits que 15.
2. Tous les entiers pairs.
3. Tous les nombres réels strictement compris entre -5 et 0.
4. Tous les nombres réels dont la valeur absolue vaut $5,2$.
5. Tous les nombres réels positifs ou nuls.
6. Tous les entiers compris entre $2,4$ inclus et $11,8$ exclus.
7. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $1,3$.
8. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est supérieure et égale à $1,3$.

Exercice 5

On donne ci-dessous 8 inéquations :

- $-2 < x < 4$;
- $x \geqslant -2,5$;
- $0 \leqslant x < 3,8$;
- $-3 \leqslant x \leqslant -0,5$;
- $x > 0$;
- $x \geqslant -3$.

1. Donner l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par chaque inéquation.
2. Représenter graphiquement chacun des intervalles précédents.

Exercice 6

On considère les nombres réels suivants : 2 ; -2 ; 0 ; $-\frac{16}{3}$; 18 ; 7 ; $6,99$; $-2,1$; 1.

1. Lesquels de ces nombres sont inclus dans l'intervalle $[-2;7[$?

2. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]-\infty;-2]$?

3. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]0;7]$.

Exercice 7

Trouver deux nombres décimaux appartenant à l'intervalle $[\frac{17}{3};\frac{18}{3}[$, puis deux autres dans l'intervalle $]-12,78;-12,77[$.

Exercice 8

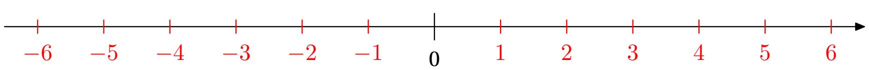
Représenter graphiquement l'intersection des intervalles $[-2;5]$, $]-1,4;6]$ et $[-4;4[$. Donner ensuite sa notation en intervalle et l'égalité à laquelle il correspond.

Exercice 9

1. On donne les intervalles $I =]-3;3]$ et $J =]-\infty;1]$

a) Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $-\pi$...........I $\sqrt{2}-1$...........J

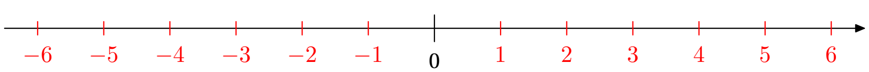
b) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :



c) Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$

2. On donne les intervalles $I =]-1;4[$ et $J = [-3;+\infty[$

a) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :



b) Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$

Exercice 10

Build the sign tables of the following expressions, showing the computations leading to the critical values and involving the test values.

1. $2x-5$;
2. $-3x+4$;
3. $\frac{3}{7}x-2$;
4. $-2-12x$;
5. $7-\frac{2}{3}x$;
6. $-3+3x$.
7. $2+\sqrt{2}x$;
8. $-3x+7$.

Exercice 11

Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

1. $(2x+7)(-3x+1)$;
2. $(-4x-8)(-5x+12)$;
3. $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3})(x+2)$;
4. $x(-x+5.2)$;
5. $5x^2(-2x+8)$;
6. $-4x(7x+8)$.

Exercice 12

Déterminer le signe des quotients suivants en fonction de la valeur de x et donner le résultat sous forme de tableau.

1. $\dfrac{2x+7}{-3x+1}$;
2. $\dfrac{-x+5.2}{x}$;
3. $\dfrac{6-3x}{2x+1}$;
4. $\dfrac{13+6x}{4-x}$;
5. $\dfrac{2x}{3x+5}$;
6. $\dfrac{1.3x+9}{-5x}$.

Exercice 13

Résolvez les problèmes suivant :

1. Étudiez le signe de $(2x+3)(2-3x)$
2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ $(x^2-4)(x^2+9) \geqslant 0$
3. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles l'expression $\sqrt{(2-x)(x-5)(x^2+1)}$ est définie ?
4. Quel est le signe de Zorro ?

Exercice 14

1. Développer, réduire et ordonner l'expression : $(x+3)^2-16$.
2. Factoriser l'expression : $(x+3)^2-16$.
3. À l'aide d'un tableau de signe, résoudre l'inéquation : $(x-1)(x+7)<0$.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, déduire du résultat proposé une inégalité ou un encadrement de x^2 :

1. $x \geqslant \frac{1}{3}$
2. $x \leqslant -4$
3. $-1,5 \leqslant x \leqslant 0,5$
4. $x \in [-4\,;9[$

Exercice 16

Résolvez les inéquations proposées en n'oubliant pas de préciser d'abord l'ensemble de définition.

1. $\frac{2(+5)-1}{x+3}$
2. $\frac{3-x}{x+3} \leqslant 2$
3. $\frac{4+x}{x} \leqslant \frac{2x+1}{2x-1}$
4. $\frac{4x}{(x+2)^2} > \frac{4}{x+2}$

Exercice 17

In this exercise we will extend the method of the signe table to products of linear expressions.

1. Give the signs of the expressions $3x-15$ and $-5x-7$ in a sign table.
2. Use the previous question to copy and fill the next table.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	5	$+\infty$
$3x-15$				
$-5x-7$				

3. Add a row to the new table where you will show the sign of the product $(3x-15)(-5x-7)$ over each interval.
4. Use the last row of the table to solve the inequations $(3x-15)(-5x-7)>0$ and $(3x-15)(-5x-7) \leq 0$.

Exercice 18

A farmer has bought 48 meters of fence to build a rectangular enclosure for a goat. Let x be the length of the smallest side of the enclosure and y the length of the longest side.

1. Prove that $y = 24 - x$.
2. Compute the area of the enclosure as a function of x.

The farmer wants the enclosure to have an area of at least 135 square meters. He wants to know what are the possible lengths for the sides to do so.

3. What inequation must we solve to answer to this problem ?
4. Check that this inequation is equivalent to $(x-15)(x-9) \leq 0$.
5. Solve this new inequation using a sign table.
6. Conclude.

Exercice 19

A company is building items in large quantities. Let x be the number of thousands of items built. Each item is sold at the price of 15 euros per unit. We call $\mathrm{S}(x)$ the total of the sales, in thousand of euros.

1. a) Compute $\mathrm{S}(1)$, $\mathrm{S}(2)$ and $\mathrm{S}(3)$.
   b) Find the general formula for $\mathrm{S}(x)$.
2. The cost of fabrication of x thousand of items has been proved to be close to $\mathrm{C}(x) = 25x^2 - 85x + 75$.
   a) Prove that the balance of the company is equal to $\mathrm{B}(x) = 25x^2 - 100x + 75$.
   b) Prove that $\mathrm{B}(x) = 25(x-1)(x-3)$.
   c) What equation must we solve to find out for how many items the company will have a positive balance ?

d) Solve this equation using a sign table.

Exercice 20

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l' inéquation :

$$-1 \leqslant \frac{4x-3}{5} \leqslant 2.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'inéquation : $-1 \leqslant \frac{5-x}{3} < 1.$

NB : attention à l'ensemble d'étude.

Exercice 21

1. Donner un encadrement de $f(x) = \frac{-4}{x^2+5}$ pour $x \in [-4\,;\,-2]$.

2. Soit x un nombre réel tel que $2x-8 \in [-2;8]$. Déterminer un encadrement de x.

3. Soit x un nombre réel tel que $-x+4 \in]3;10]$. Déterminer un encadrement de x.

Exercice 22

Comparer $\frac{n+2}{n+3}$ et $\frac{n+3}{n+4}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 23

On considère des cylindres métalliques fabriqués par des machines qui commettent des erreurs dans les découpes de pièces.

On sait que le rayon r de la base a une valeur approchée de $2,15cm$ à $0,01$ près, et que la hauteur h du cylindre est comprise entre $2,36m$ et $2,38m$.

En prenant $3,14$ comme valeur approchée de π par défaut à $0,01$ près, donner un encadrement du volume de la pièce.

Exercice 24

La vitesse de la lumière est de $2,99792458 \times 10^8\ m.s^{-1}$.
Lors d'une expérience, on a établi que le temps nécessaire à la lumière pour aller de la Terre à la Lune est de $1,285s$ à $0,005s$ près.

Donner un encadrement de la distance Terre-Lune.
NB : la précision de cette distance est de nos jours inférieure au mm, ce qui nous permet de savoir que la Lune s'éloigne d'environ de 3 à $5cm$ par an de la Terre.

Exercice 25

Le nombre π est un nombre essentiel en géométrie. La recherche notamment d'une bonne approximation de π par des fractions a de tout temps passionné les mathématiciens.

Les Babyloniens utilisaient comme approximations $3+\frac{1}{8}$.
Les Egyptiens, au XVIIème siècle avant JC, utilisaient $3+\frac{13}{81}$.
En Inde, vers 380 avant JC, on utilisait $3+\frac{177}{1250}$.
En Chine, au Vème siècle, on utilisait $\frac{355}{113}$.
Voici encore d'autres fractions communément utilisés : $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{103\,993}{33\,102}$.

Calculer toutes ces fractions et indiquer s'il s'agit une valeur par défaut ou excès, en donnant la précisison.

Au XVIIIème siècle, Leibniz a trouvé :

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots\right)$$

Donner les premières fractions s'approchant de π.