

PREMIÈRE LEÇON

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE



Résumé Aujourd'hui, notre héros débute sa formation de chevalier Mataïe auprès de son maître Dark Mathemator en abordant la délicate étude des fonctions numériques...

1 - Préambule : de quoi parlons-nous?

Qu'est-ce qu'une fonction?

Mathémator : Question idiote n'est-ce pas?

Téhessin¹ : Ben c'est une formule comme par exemple $f(x) = (x + 1)^2$

Mathémator : C'est tout? Je vois...L'année de formation qui nous attend ne sera pas superflue. Si vous avez éprouvé des difficultés l'an passé, c'est peut-être que vous n'avez pas fait l'effort d'avoir en tête une définition claire, précise, rigoureuse. Peut-être n'avez-vous pas compris comment cette définition pouvait être liée aux diverses propriétés, à quoi tout le tralala pouvait servir, comment cette partie du programme pouvait être reliée à d'autres notions déjà étudiées. Vous ne semblez pas avoir une vision intuitive de la notion susceptible de vous aider à comprendre comment tout s'imbrique si merveilleusement dans notre magnifique univers mathématique à l'esthétique si parfaite. Pourquoi cette notion est-elle apparue? Quelle est sa place dans l'histoire de l'esprit humain? Quelles sont ses applications concrètes? C'est avec ces questions en tête que nous essaierons d'aborder toutes les notions qu'un(e) jeune Mataïe se doit de maîtriser à l'issue de sa formation terminale.

Téhessin (à part) : *À ce rythme là, dans deux ans on y est encore, et moi j'ai d'autres projets.*

Mathémator : Vous dites?

Téhessin : J'ai hâte d'étancher ma soif de connaissance, ô céleste maître.

Mathémator : À la bonne heure! Disons qu'une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée. Cela correspond typiquement au diagramme en patates suivant

1. Si notre héros est un garçon, c'est pour faciliter les accords des adjectifs et participe passé.

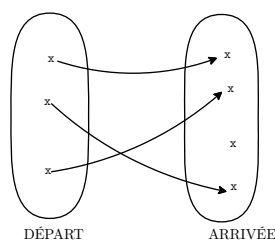


Figure 1 –

Nous nous restreindrons aux fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de \mathbb{R} .

Téhessin : Parce qu'il en existe d'autres?

Mathémator : Nous verrons cette année quelques exemples de fonctions à valeurs complexes, de fonctions vectorielles, de fonctions de plusieurs variables, sans toutefois rentrer dans le détail, mais sachez au moins qu'elles existent.

Téhessin : Donc ce que j'ai appelé *fonction* depuis le collège n'est qu'un cas particulier de fonction.

Mathémator : Oui mais, jusqu'à nouvel ordre, par abus de langage, *fonction* sous-entendra pour nous *fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}* .

Il reste un problème à résoudre pour notre confort intellectuel : nous travaillons avec des nombres réels, mais qu'est-ce que l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels?

Téhessin : Ben c'est tous les nombres qui existent.

Mathémator : C'est faux et beaucoup trop vague ! Faux car nous allons rencontrer cette année de nouveaux nombres qui ne seront pas des réels (les complexes) et vague car cela ne nous permet pas d'avoir des propriétés sur \mathbb{R} exploitables.

Malheureusement, la construction de l'ensemble \mathbb{R} est hors de notre portée pour le moment.

Problème local - Problème global - Voisinage

Mathémator : Posez votre stylo sur votre table et observez-le : il a l'air solide et immobile. Maintenant, imaginez que vous observez ce même stylo, mais avec une loupe assez puissante pour voir ce qui s'y passe au niveau atomique : votre stylo vous apparaît alors plein de vide, avec des électrons qui tournent dans tous les sens. C'est pourtant le même stylo. Mais une propriété locale - un atome est pratiquement vide de matière - n'est pas « exportable » au niveau global - le stylo nous apparaît solide, sans la moindre trace de vide.

Pour l'étude d'une fonction, il faudra prendre le même type de précautions, à savoir distinguer un problème local d'un problème global.

Téhessin : Je comprends votre exemple physique, mais je ne vois pas bien ce que ça peut donner en mathématique.

Mathémator : Il faut commencer par acquérir une bonne vision de cet ensemble \mathbb{R} , à la fois connu et mystérieux. Pour cela fermez les yeux.

Téhessin (à part) : *C'est le gourou d'une secte ou un prof de maths?! Je vais quand même garder un œil ouvert au cas où.*

Mathémator : Vous voyez la droite des réels?

Téhessin (à part) : *Avec des éléphants roses courant dessus tout haut :* je ne vois qu'elle.

Mathémator : Bien, alors repérez le nombre 32 et zoomez dessus, disons en vous plaçant dans l'intervalle $[31,33]$. Puis rezoomez, cette fois-ci en vous plaçant dans l'intervalle $[31,9; 32,1]$: vous êtes plus proche de 32. Mettez-vous maintenant dans la peau de $32 - 10^{-32}$.

Téhessin (à part) : *Ça devient grave, il a peut-être besoin d'une piqure...*

Mathémator : Pour lui, 31,9 est à l'autre bout du monde et il se sent très proche de 32. Mettez-vous alors à la place de $32 - 10^{-10^{10}}$: vous vous sentez voisin de 32 et pour vous $32 - 10^{-32}$ est sur une autre planète.

Téhessin : Je commence à voir, les yeux fermés, où vous voulez en venir : on aura beau chercher, on ne trouvera pas de nombre réel plus proche de 32 que tous les autres.

Mathémator : La notion de « proximité » devient alors toute relative. Il faudra garder ces schémas en tête quand nous travaillerons dans \mathbb{R} .

Revenons à présent à notre distingo local - global. Nous serons souvent amenés à parler d'une assertion vraie ou fausse « au voisinage » d'un point. Par exemple, pensez-vous que $x^2 \leq 1$ au voisinage de 0?

Téhessin : En fait, c'est faux pour $x = 2$, par exemple, mais ça devient vrai si x est compris entre -1 et 1 , donc « localement », autour de 0, c'est vrai.

Mathémator : On peut dire en fait que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 - 1, 0 + 1]$, l'assertion est vraie. Nous verrons que ce résultat nous permettra de dire que l'assertion est vraie au voisinage de 0.

Maintenant, pensez-vous que $1/x^2 \geq 16$ au voisinage de 0?

Téhessin : Je vous arrête tout de suite : l'assertion est fausse car elle n'est même pas vraie en 0 puisque $1/x^2$ n'est pas défini en 0.

Mathémator : Cela aurait pu être un argument, mais cela se serait avéré très réducteur, car nous serons amenés à étudier des propriétés au voisinage de points où la fonction n'est pas définie, notamment au moment de l'étude des limites. Ici, nous pouvons dire que l'assertion est vraie pour tout x appartenant à $[0 - 4, 0 + 4]$ ET à l'ensemble de définition \mathbb{R}^* .

On peut utiliser le symbole \cap de l'intersection pour noter l'ensemble $[0 - 4, 0 + 4] \cap \mathbb{R}^*$, ce qui peut encore s'écrire sous la forme $[-4, 0[\cup]0, 4]$. Ainsi, n'oubliez pas de considérer l'intersection de l'intervalle englobant le point avec l'ensemble de définition

Encore un petit exemple : croyez-vous que x^3 soit positif au voisinage de 0?

Téhessin : En fait, x et x^3 ont le même signe, donc il suffit de dire que pour $x = 10^{-32}$ par exemple, l'assertion est fausse.

Mathémator : Mouais, le problème, c'est qu'un contre-exemple ne suffit pas : qui nous dit que x^3 ne devient pas positif pour des valeurs de x plus petite? Il faut donc donner une démonstration et pas seulement un cas particulier. Ce sera l'occasion de découvrir un *raisonnement par l'absurde* qui nous rendra service tout au long de l'année.

Supposons donc que l'assertion soit vraie (*on suppose ce qui nous semble absurde...*)

Cela est équivalent à dire qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que x^3 soit positif pour tout $x \in [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon]$

Ainsi, par exemple, $(-\varepsilon)^3$ est positif, or $(-\varepsilon)^3 < 0$ comme $-\varepsilon$, on arrive donc à une *contradiction*.

Il y a donc quelque chose qui cloche dans notre raisonnement et ça ne peut être que le point de départ car nous sommes sûrs du reste, donc l'assertion est fausse.

Retenez donc bien qu'il faut que le point critique appartienne à l'intervalle.

Nous pouvons donc proposer l'assertion suivante :

Définition I-1

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $I \cap \mathcal{D}$

Nous serons également amenés à étudier des assertions au voisinage de l'infini.

Téhessin : Ça me paraît un peu difficile à atteindre.

Mathémator : Mais ce n'est pas impossible : nous allons un peu modifier notre définition. Par exemple, est-ce que la fonction inverse

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{array}$$

est majorée sur son ensemble de définition ?

Téhessin : Je sens que c'est faux au voisinage de 0.

Mathémator : Je vous laisse le montrer. Modifions alors le problème : vous êtes d'accord que $f(x) \leq 1$ dès que $x \in [1, +\infty[$. On dira alors que f est majorée par 1 au voisinage de $+\infty$: on ne peut pas mettre l'infini dans notre intervalle, certes, mais on peut le placer à l'une de ses extrémités

Définition I-2

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} . Une assertion est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$

Téhessin : Toutes ces propriétés me semblent pourtant plus globales que locales : elles sont vraies sur de grands intervalles.

Mathémator : Je comprends ce que vous voulez dire : en fait, une propriété est locale dès qu'elle n'est pas vraie *partout*. Il y a ensuite des propriétés plus locales que d'autres, je vous l'accorde. Pour vous en rendre compte, nous allons (re)découvrir un concept vraiment très local, celui de limite. Retenez également, au point de vue méthodologique, qu'un raisonnement par l'absurde nous aide souvent à montrer qu'une assertion est fautive localement.

2 - Notion de limite

Limite finie en un réel, limite à gauche, limite à droite

Téhessin : Si la limite est finie en un réel, je ne vois pas trop le problème : je me rappelle que l'année dernière, les limites faisaient toujours appel à un infini.

Mathémator : La notion de limite finie en un réel peut paraître tirée par les cheveux, mais elle constitue la base de la notion de continuité que nous découvrirons au chapitre suivant.

Vous connaissez la notation

$$\lim_{x \rightarrow a} = \ell$$

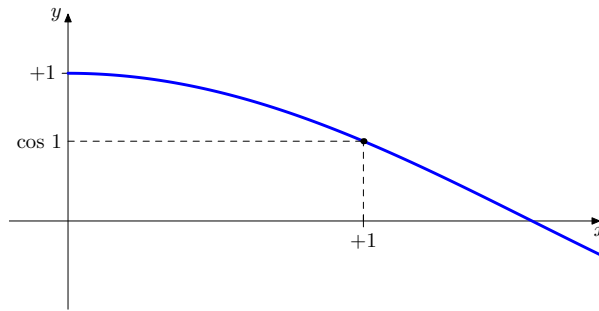
qui se lit *la limite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut ℓ* et qui signifie « à mesure que x se rapproche infiniment de a , son image $f(x)$ se rapproche infiniment de ℓ »

Cela peut paraître assez évident, mais regardons quand même un petit exemple

Considérons les fonctions

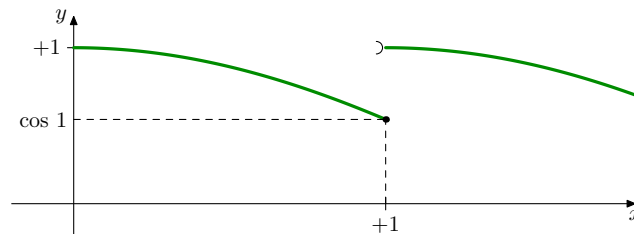
$$f_1 : \begin{array}{l} [0,2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array}$$

dont voici le graphe



et

$$f_2 : [0,2] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0,1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$



On voit sur le graphe de f_1 que, à mesure que x se rapproche infiniment de 1, son image $f_1(x)$ se rapproche infiniment de $f_1(1) = \cos 1 \approx 0,540$.

Ça peut se voir aussi sur un tableau de valeurs approchées. Pour mettre en évidence un rapprochement de 1 par la gauche et par la droite, on a fait figurer les images de $1 + h$ et $1 - h$ pour des valeurs de h de plus en plus petites.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$f_1(1+h)$	-0,416	0,071	0,454	0,532	0,539
$f_1(1-h)$	1	0,878	0,622	0,549	0,541

En revanche, on voit sur le graphe de f_2 que, à mesure que x se rapproche de 1 par valeurs inférieures (par la gauche), c'est à dire en étant strictement inférieur à 1, son image $f_2(x)$ se rapproche infiniment de $\cos 1 \approx 0,540$. Alors que, à mesure que x se rapproche de 1 par valeurs supérieures (par la droite), $f_2(x)$ se rapproche infiniment de $\cos(1-1) = 1$. Et ce tableau de valeurs approchées le confirme.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$f_2(1+h)$	0,540	0,878	0,999	0,999	0,999
$f_2(1-h)$	1	0,878	0,622	0,549	0,541

Qu'en pensez-vous?

Téhessin : Dans le premier cas il n'y a pas de problème : $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \cos 1$, alors que dans le deuxième cas, ça dépend de notre sens de parcours : si on vient de la gauche, la limite vaut $\cos 1$, si on vient de la droite, c'est $\cos 0$.

Mathémator : Bonne remarque! Mais quand vous verrez la définition rigoureuse de la limite d'une fonction l'année prochaine, vous démontrerez que la limite est unique : elle ne peut pas prendre deux valeurs en même temps. Mais pour garder ces précieux renseignements sur les comportements à gauche et à droite, on parlera de **limite à gauche** et de **limite à droite**.

On notera ainsi $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = \cos 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = \cos 0 = 1$

Pour les curieux : une définition rigoureuse de la limite en un réel

L'idée vient du dessin suivant :

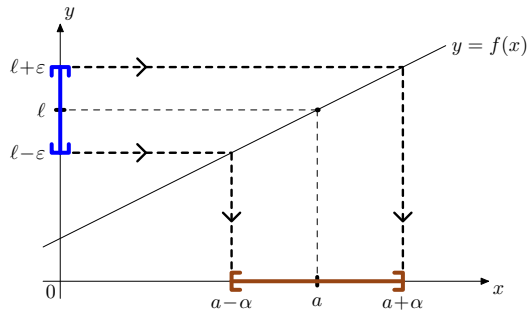


Figure 2 –

qui nous donne une idée de définition : on peut être aussi près que l'on veut de la limite ℓ sur l'axe des ordonnées (c'est à dire qu'on peut choisir n'importe quelle valeur positive de ϵ), il suffit pour cela d'être assez près de a sur l'axe des abscisses (c'est à dire qu'il suffit de choisir un α dépendant du ϵ choisi).

Cela se traduit par la définition suivante :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit f une fonction de I vers \mathbb{R} , soit ℓ un réel et soit a un élément ou une extrémité finie de \mathbb{R} . On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x de I vérifiant $|x - a| \leq \alpha$, on a $|f(x) - \ell| \leq \epsilon$.

Ça paraît bien compliqué, notez tout de même qu'il existe des notations logiques simplifiant l'écriture

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha] \quad f(x) \in [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$$

Heureusement, vous avez encore un an avant d'affronter ces horribles symboles... Sachez tout de même que cette définition permet de prouver les théorèmes opératoires usuels, de résoudre un certain nombre de problèmes et qu'elle est la base d'une bonne compréhension de l'analyse.

Les limites et l'infini

- Comment exprimer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$?

Mathémator : Vous avez rencontré ce type de situation l'année dernière : pouvez-vous nous proposer un exemple?

Téhessin : Je me souviens que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

Mathémator : À la bonne heure : traçons la représentation graphique de la fonction $f : \begin{matrix}]0,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{matrix}$

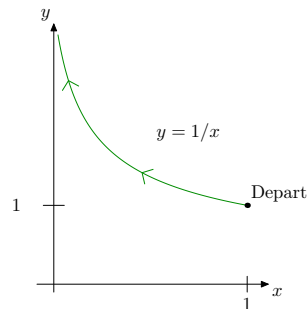


Figure 3 –

On sait d'où on part, mais où arrive-t-on?

Téhessin : Un célèbre héros de la pensée contemporaine aurait dit « vers l'infini et au-delà », mais de là à l'exprimer mathématiquement...

Mathémator : « To infinity and beyond, Buzz Lightyear to the rescue » est la véritable citation. On fixe une barre au vaillant Buzz : « même pas cap de dépasser la hauteur 100 ! »

Téhessin (à part) : *Aïe Aïe Aïe, j'aurais pas dû le brancher la-dessus...*

Mathémator : « Ah, ah » dit-il. Puisque $1/x \geq 100 \Leftrightarrow x \leq 1/100$, il suffit donc pour x de se trouver dans l'intervalle $]0, 1/100]$ pour que $1/x$ dépasse cette barre.

Téhessin : Oui, oui, oui, je vois. Et si on lui fixe une barre plus haute, il la dépassera si x se trouve suffisamment près de 0. Mais je ne distingue pas encore la formulation d'une définition.

Mathémator : En fait, je dois avouer qu'elle n'est pas au programme cette année. Nous nous contenterons de cette approche intuitive.

La définition secrète

Allez, je sais que vous en mourez d'envie, alors la voici
 Quelque soit le réel A strictement positif (notre barre), il existe un réel ϵ strictement positif (qui dépendra du choix de A) tel que, pour tout $x \in]a, a + \alpha[\cup]$ (si x est à moins de α mètres de a) on a $f(x) \geq A$ ($f(x)$ dépasse la barre).
 L'idée est donc : quelque soit la hauteur choisie, on pourra toujours la dépasser en se plaçant suffisamment près de a , qui se traduit plus prosaïquement par

$$\forall A > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in]a, a + \alpha[f(x) \geq A$$

Vous pourrez sans difficulté réfléchir au problème symétrique de la limite à gauche.

Téhessin : Je n'en doute pas, mais avant, une question me taraude l'esprit : vous m'avez présenté la distinction local/global comme un préalable indispensable à l'étude des limites, mais je ne vois pas trop le rapport avec ce que nous venons de voir

Mathémator : Plusieurs remarques : d'abord j'apprécie que vous ne laissiez pas une question sans réponse, c'est comme ça que vous progresserez. Ensuite, on peut traduire la définition de la limite en termes de voisinage. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ veut dire que, quelque soit le voisinage \mathcal{V} de $+\infty$, on peut trouver un voisinage \mathcal{W} de 0 tel que pour tout $x \in \mathcal{W}$, on a $f(x) \in \mathcal{V}$, mais bon, c'est un détail à notre niveau.

Ce qu'il faut plutôt retenir, c'est que la limite ne nous donne de renseignement qu'au voisinage de zéro. Nous ne pouvons rien en déduire pour le comportement de f ailleurs.

Téhessin : Ce que je ne comprends pas, c'est que tout ce qui englobe zéro correspond au voisinage de zéro, donc \mathbb{R}^* en particulier. Donc une propriété vraie au voisinage de zéro est vraie sur \mathbb{R}^* .

Mathémator : Vous vous doutez bien que c'est faux, sinon il suffirait de savoir ce qui se passe en zéro pour savoir ce qui se passe partout (c'est pourtant une erreur classique qui envahie les copies de Bac...). Mais cela met en évidence qu'avec des idées floues, on arrive à dire n'importe quoi. Il faut bien comprendre que *quelque soit le voisinage de la limite* (ici $+\infty$), il existe UN voisinage de 0 où la propriété est vraie. Un et pas tous. Mais attention, un ne veut pas dire un seul, mais au moins un. En effet, si c'est vrai pour un voisinage de 0, c'est aussi vrai pour un voisinage de zéro « plus petit ».

Téhessin (à part) : *Pourquoi je suis revenu de vacances : c'est pourtant si simple de vivre d'amour et d'eau fraîche...*

• Comment exprimer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$?

Téhessin : Êtes-vous sûr de devoir encore m'embrouiller la tête pour me dire à la fin que la définition est hors programme ?

Mathémator : D'abord, je comprends que vous soyez un peu dérouté alors que vous avez encore du sable de plage dans les oreilles, mais j'espère que vous comprendrez qu'acquérir une certaine liberté intellectuelle (qui vous permettra de déjouer de nombreux pièges) demande malheureusement quelques efforts. Et puis je suis désolé, mais les deux définitions qui suivent sont au programme...

Alors retournons à la mine. Avez-vous en tête une fonction qui répondrait au problème?

Téheessin : Ben toujours la même, la fonction inverse car je me souviens que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Mathémator : Par exemple. Mais pour varier les plaisirs, nous allons plutôt considérer

$$g : \begin{array}{l}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - \frac{1}{x} \end{array}$$

Téheessin : On pourrait commencer par regarder un tableau de valeurs

x	1	10	100	1 000
$f(x)$	0	0,9	0,99	0,999

On sent que la limite est 1.

Mathémator : Je ne doute pas de votre flair, mais il faudrait en être sûr : qui vous dit que la fonction ne se mette pas à faire n'importe quoi après 1000? En fait, une idée serait de dire que pour être sûr que $g(x)$ se rapproche de 1, il suffit de vérifier qu'il ne s'en éloigne pas.

Illustrons notre propos par ce petit dessin

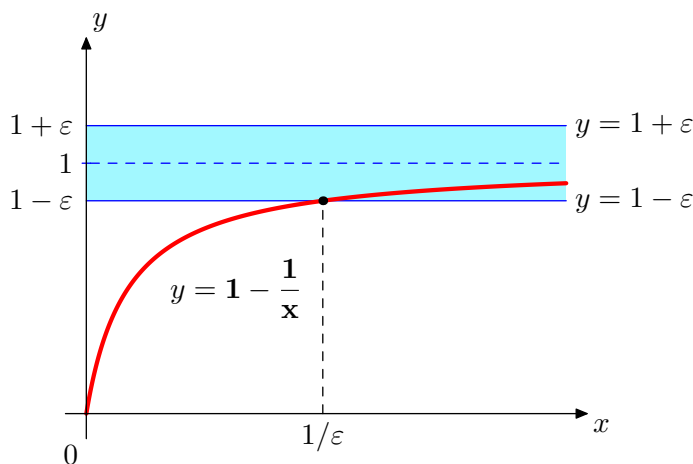


Figure 4 –

On se place aussi près que l'on veut de la limite présumée 1 en fabriquant le tube bleu autour de 1. Vous « sentez » qu'à partir d'un certain moment, la courbe restera toujours dans le tube bleu.

Quel est ce « moment »?

Téheessin : D'après le dessin, c'est à partir du moment où $g(x) = 1/\epsilon$, c'est à dire $1 - 1/x = 1 - \epsilon$, ce qui signifie finalement dès que $x = 1/\epsilon$. Ça se voit sur le dessin, mais est-ce vraiment une preuve?

Mathémator : Pour l'instant non, car cela ne correspond à aucun résultat établi. Il va donc falloir se mettre d'accord sur une définition qui paraisse naturelle suite à notre petite expérimentation sur la fonction g .

Je vous propose donc la définition suivante

Définition I-3

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

Je vous laisse bien sûr adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

Cette définition a l'avantage de nous proposer une méthode concrète pour étudier la limite d'une fonction au voisinage de $+\infty$.

Essayer ainsi de prouver que la fonction inverse que vous aviez évoqué tend vers 0 en $+\infty$.

Téhessin : Soit ε un réel strictement positif quelconque. On voudrait savoir s'il existe un seuil à partir duquel toutes les valeurs prises par la fonction restent dans l'intervalle $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[$. On cherche donc x tel que

$$(I) : -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Or $x > 0$, donc

$$(I) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$(I) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc, quelque soit l'intervalle ouvert centré en 1 du type $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, celui-ci contient toutes les valeurs prises par la fonction inverse dès que x est supérieur à $1/\varepsilon$.

Mathémator : Impressionnant ! Le métier commence donc à rentrer.

• Comment exprimer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$?

Mathémator : Je suis sûr que vous allez pouvoir prendre un peu plus d'initiative à présent. Pour avoir un graphique assez lisible, nous allons prendre une fonction que vous connaissez bien mais qui ne tend pas trop vite vers l'infini, la fonction racine carrée.

Téhessin : Laissez-moi la tracer

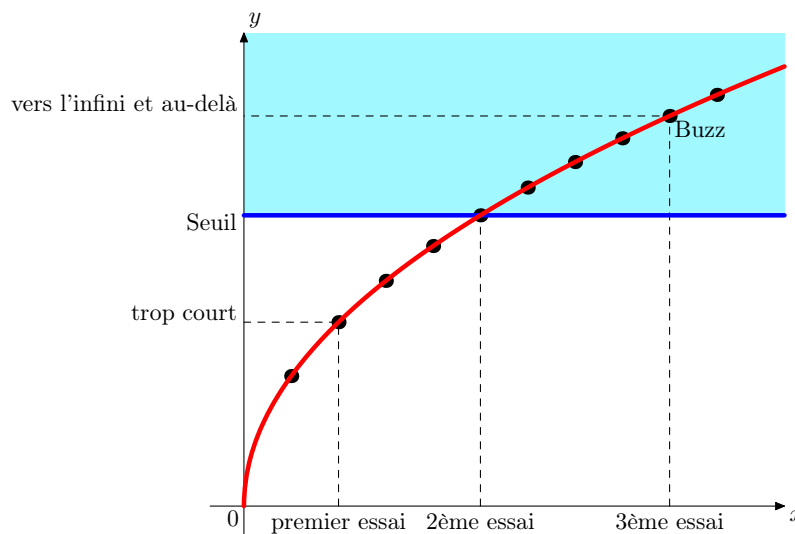


Figure 5 –

Pour reprendre une illustration précédente, dès que l'abscisse de Buzz est suffisamment grande, il restera dans la zone bleue au-dessus du seuil fixé.

Je vous propose donc la définition suivante

Définition I-4

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ lorsque, pour tout réel A strictement positif, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

Mathémator : Je dois avouer que vous assurez un maximum. Puisque vous êtes en forme, essayez maintenant de prouver que la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Téheessin : Soit A un réel strictement positif quelconque qui sera notre seuil. Regardons à quel moment $f(x)$ le dépassera

$$(J) : f(x) > A \Leftrightarrow x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A}$$

Donc, quelque soit A , l'intervalle $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x > \sqrt{A}$ donc, par définition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Mathémator : C'est parfait.

3 - Les théorèmes

Téheessin : Je commence à m'habituer à ces définitions, mais serons-nous toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites?

Mathémator : Rassurez-vous, dans la plupart des cas, nous pourrons utiliser les théorèmes que vous avez en fait découvert l'an passé.

Mais avant toute chose, voici le principal théorème du cours

Théorème I-1

En analyse, un dessin avant de résoudre l'exercice tu feras

Théorèmes de comparaison

Mathémator : Ce théorème est résumé par le dessin suivant

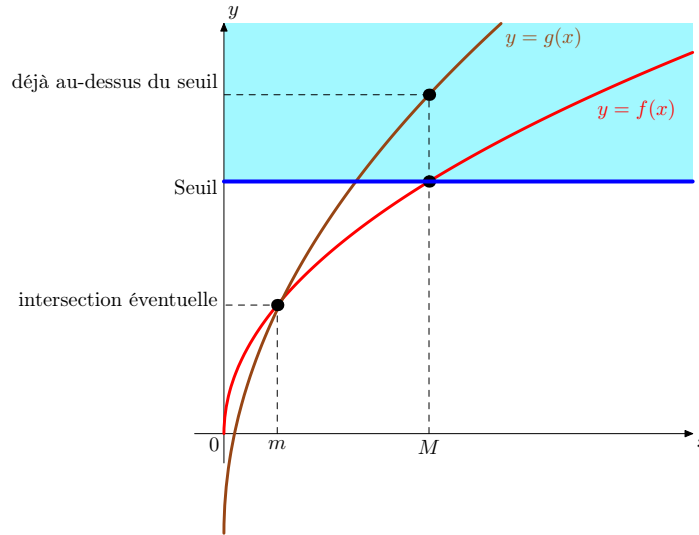


Figure 6 –

à savoir

Théorème I-2

Si pour tout $x \geq m$ on a $g(x) \geq f(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Téheessin : En fait, ça veut dire que si on est plus grand que quelque chose qui tend vers $+\infty$, on tend soi-même vers $+\infty$.

Mathémator : C'est cela, oui, et il existe le pendant en $-\infty$ que je vous laisse imaginer. Maintenant, le dessin est bien beau, mais il s'agirait de démontrer ce résultat. Or nous n'avons que la définition de la limite en magasin, donc utilisons-la.

On veut prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geq M$, on a $f(x) \geq A$

De plus, pour tout $x \geq m$, on a $g(x) \geq f(x)$

Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geq \mu$, on a $g(x) \geq A$, ce qui exprime que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $g(x) = \sqrt{x} + |\sin x| \geq \sqrt{x}$ pour tout réel x, donc par comparaison des limites on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Théorèmes des gendarmes

Mathémator : Un nom qui fait un peu peur et qui laisse imaginer le pauvre prisonnier entouré de deux fiers à bras en uniforme. On aurait pu aussi l'appeler théorème des portes d'ascenseur, théorème de la mouche écrasée, théorème du rouleau compresseur, et j'en passe et des meilleures.

Comme d'habitude, l'idée vient du petit dessin suivant

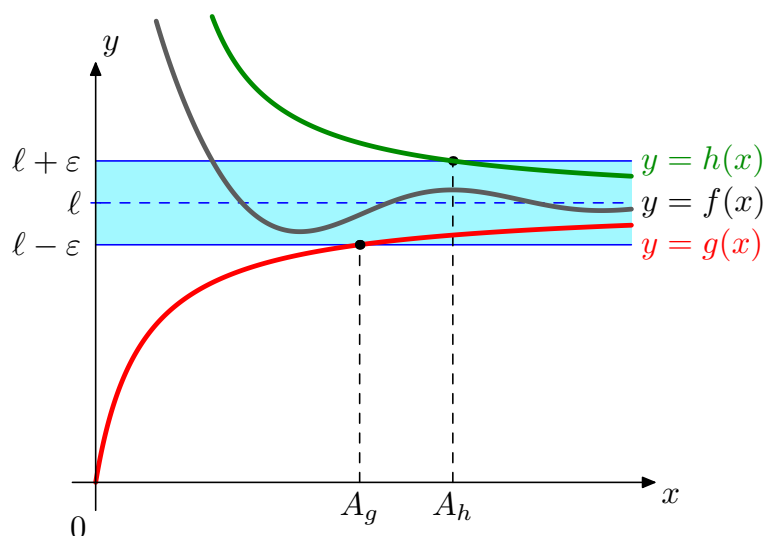


Figure 7 –

Une fonction f est coincée entre deux fonctions g et h qui tendent vers l en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers l en $+\infty$. Il ne reste plus qu'à trouver un énoncé et une démonstration.

Téheessin : Je veux bien donner l'énoncé

Théorème I-3 Théorème des gendarmes en l'infini

Soient f , g et h des fonctions et l et A deux réels.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ et que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \geq A$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Mathémator : La démonstration se déduit du dessin : on fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, i.e. $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, i.e. $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Soit M le plus grand des réels A_g , A_h et A , alors on a simultanément pour tout $x > M$

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

On admettra en terminale que ce théorème s'applique aussi pour des limites en des valeurs finies (il suffirait pour le prouver de connaître les définitions des limites en des valeurs finies)

Théorème I-4 Théorème des gendarmes

Soient f , g et h des fonctions, l et A deux réels et ω un réel ou l'infini.

Si $\lim_{x \rightarrow \omega} g(x) = \lim_{x \rightarrow \omega} h(x) = l$ et que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \geq A$, alors $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = l$

Par exemple, nous pouvons maintenant étudier la limite de $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

En effet, vous savez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$. Pour $x > 0$, on obtient donc

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Opérations sur les limites

Mathémator : Il suffit d'ouvrir votre livre à la page 20 : toutes ces propriétés sont admises même si elles sont démontrables à l'aide des définitions.

Limites de fonctions composées

Mathémator : J'espère que vous êtes à l'aise dans la composition - décomposition de fonctions. Par exemple, pouvez-vous décomposer la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires ?

Téhessin : J'y arrive encore

$$x \xrightarrow{t \mapsto -3t+1} -3x+1 \xrightarrow{t \mapsto \sqrt{t}} \sqrt{-3x+1}$$

Mathémator : Bien. supposons maintenant que vous vouliez étudier la limite de φ en $-\infty$. Nous allons être amenés à décomposer le calcul de limite. Pour nous guider, nous aurons besoin de la propriété (admise) suivante :

Propriété I-1

Soient ω, Ω et ℓ des réels ou l'infini et f et g deux fonctions, alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \Omega \\ \lim_{T \rightarrow \Omega} g(T) = \ell \end{array} \right\} =: \lim_{x \rightarrow \omega} g \circ f(x) = \ell$$

Appliquez cette propriété au cas étudié.

Téhessin : Avec les couleurs, cela donne

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \sqrt{T} = +\infty \end{array} \right\} \text{par composition} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$$

4 - Comportement asymptotique

Comment démontrer qu'une courbe admet une asymptote au voisinage de l'infini?

Mathémator : Le mot asymptote évoque sûrement quelque chose pour vous.

Téhessin : C'est quand la courbe ressemble à une droite et il y a un rapport avec les limites, mais j'avoue avoir quelque peu oublié le reste.

Mathémator : Et bien reprenons depuis le début. Et pour commencer, bien sûr, un petit dessin.

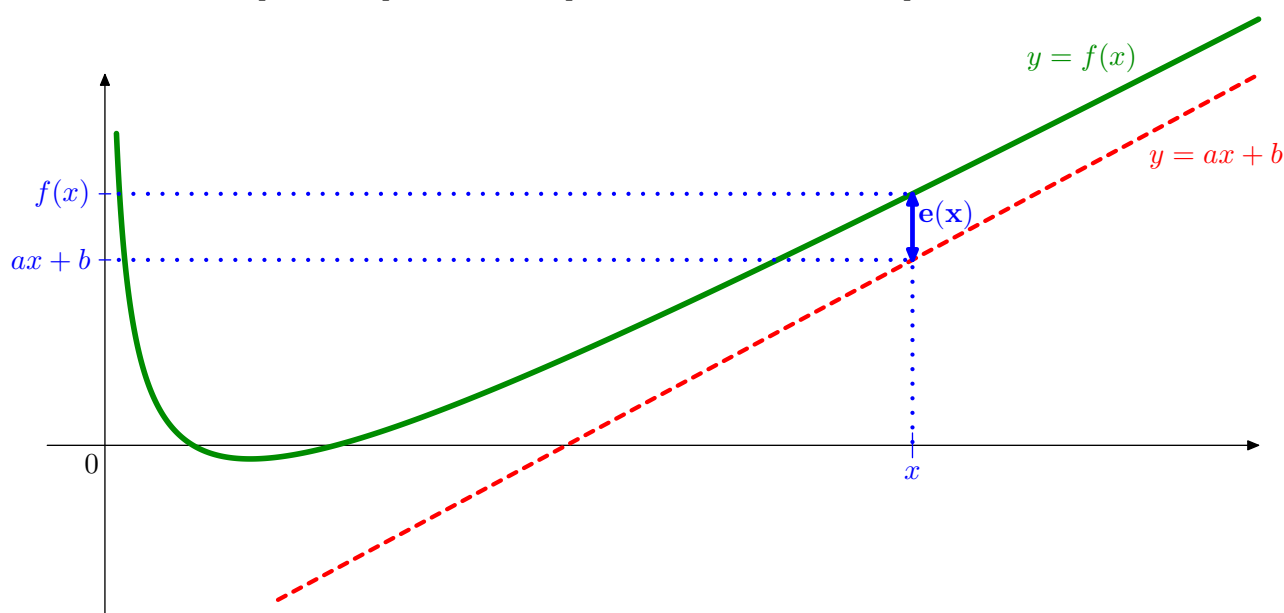


Figure 8 –

Pour traduire numériquement le fait que la courbe vient « se coucher » sur la droite, il faudrait mettre en évidence que $e(x)$ devient de plus en plus petit à mesure que x augmente.

Téhessin : Ça sent la limite : il doit falloir dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) = 0$

Mathémator : Exactement. Or $e(x) = f(x) - (ax + b)$, donc

Théorème I-5

La courbe d'équation $y = f(x)$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

On obtient un théorème similaire en $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$, alors \mathcal{C}_f admet -elle forcément une asymptote au voisinage de $+\infty$?

Téhessin (à part) : *Je sens le piège (tout haut)* Non, bien sûr!

Mathémator : Alors, donnez-moi un contre-exemple.

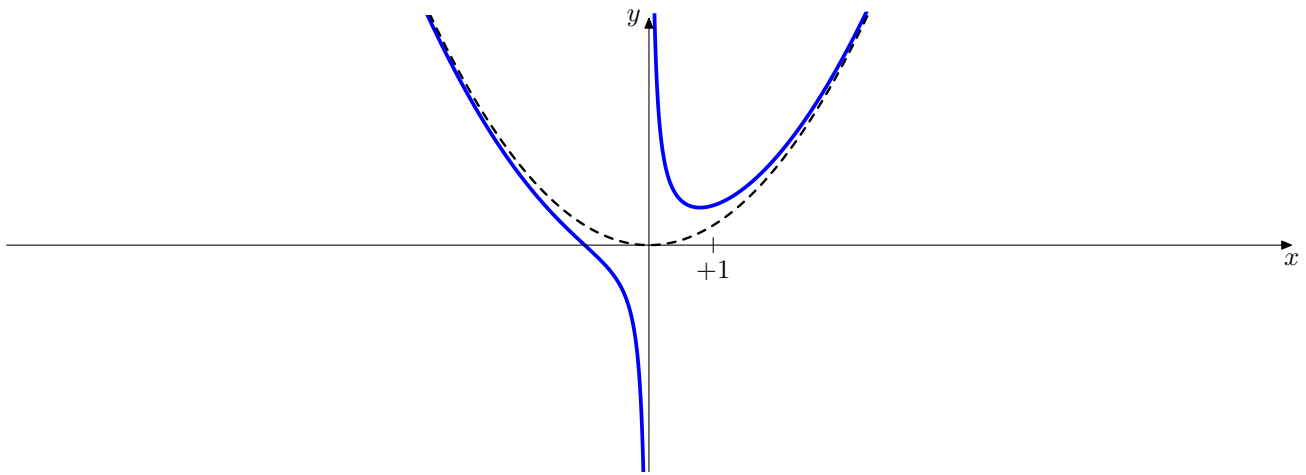
Téhessin : Si j'ai bien compris, la courbe doit « ressembler » à une droite au voisinage de l'infini, or une droite est la représentation graphique d'une fonction affine. Ainsi, pour que la courbe admette une asymptote en l'infini, il faut qu'elle soit la représentation d'une fonction du style

$$x \mapsto ax + b + e(x)$$

avec $e(x)$ qui tend vers 0 en l'infini, c'est à dire une partie affine plus une partie qui compte pour du beurre.

Mathémator : Votre esprit d'analyse m'impressionne, mais vous ne m'avez pas donné de contre-exemple.

Téhessin : Il suffit de prendre une partie non affine plus un bout négligeable. Disons $x \mapsto x^2 + 1/x$. Je rentre également la courbe d'équation $y = x^2$ et j'obtiens sur l'écran de ma calto :



Mathémator : Vous obtenez ce que vous appellerez peut-être un jour une branche parabolique. Mais il existe des comportements beaucoup plus irréguliers. Néanmoins vous avez bien compris que l'on peut reconnaître des termes dominants dans une expression. Attention, c'est un problème local. Dans votre exemple, x^2 est dominant en $+\infty$, mais au voisinage de zéro, c'est $1/x$ qui domine.

Téhessin (à part) : Ça va, j'ai compris : global vs local. Il commence à radoter.

Mathémator : Il ne vous reste plus qu'à vous entraîner sur une petite centaine d'exercices pendant ma pause méditation. Que la force soit avec vous !

Dominants et dominés

Téhessin : Votre intitulé fait un peu peur.

Mathémator : Évitions tout anthropomorphisme et contentons-nous de flotter dans l'éther mathématique.

Comme nous venons de le remarquer, il faudra cette année le plus souvent repérer à l'œil nu la limite en repérant les dominants et les dominés. Dans l'exemple précédent, $1/x$ était le terme dominant et x^2 le terme dominé au voisinage de 0, donc c'est $1/x$ qui « portera » la limite. Mais au voisinage de l'infini, les rôles s'échangent.

C'est parfois moins visible.

Prenez par exemple $3x^2 - 132x + 27$ au voisinage de $+\infty$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée $\infty - \infty$. Mais fermez les yeux et regardez les graphes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$: vous voyez bien que x^2 est bien plus fort que x au voisinage de l'infini, et donc que c'est x^2 qui porte la limite qui sera donc $+\infty$.

Téhessin : Je pourrai écrire ça sur mes copies ?

Mathémator : Et non : ce n'est qu'un support à l'intuition, qui peut parfois être dangereuse comme nous le verrons dans les « vrai ou faux ». Pour le prouver par le calcul, on peut par exemple mettre le plus fort en facteur :

Pour tout $x \neq 0$, $3x^2 - 132x + 27 = x^2 \left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2} \right)$

Or

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{132}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ =: \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{132}{x} + \frac{27}{x^2} \right) = 3 \left. \begin{array}{l} \text{par produit} \\ =: \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 132x + 27 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

5 - Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les limites : une interview exclusive.

Téheessin : Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !

Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téheessin : Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !

Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téheessin : Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téheessin : Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M ?

Mathémator : J'avoue que c'est difficile à croire, et pourtant la moitié des élèves sont tombés dans le panneau lors de l'épreuve du bac 2003.

Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

6 - Exercices

Avec les définitions

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$

1. Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(1)$, $f(32)$, $f(320)$ et $f(3232)$.

2. Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?
3. On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01, c'est-à-dire $]1,99; 2,01[$.
Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]1,99; 2,01[$ (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2 + 1/x^2$)
4. On considère l'intervalle $]2 - r; 2 + r[$ avec $r > 0$.
Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r , tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]2 - r; 2 + r[$.
5. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $3x^3 + x^2$

1. Donner les valeurs de $g(32)$, $g(320)$ et $g(3232)$.
2. Observer la représentation graphique de g donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de g en $+\infty$?
3. On considère l'intervalle $]100; +\infty[$. Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]100; +\infty[$.
4. On considère un intervalle $]A; +\infty[$, avec $A > 0$. Montrer que pour x supérieur à \sqrt{A} , tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$.

Exercice 3

Soit h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -2x + 3$

Démontrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = 2 + \frac{3}{(x-1)^2}$

1. Justifiez que h est bien définie sur $]1; +\infty[$.
2. Observer la représentation graphique de h donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de h en 1?
3. On considère l'intervalle $]1000; +\infty[$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x) \in]1000; +\infty[$.
4. On considère un intervalle $]A; +\infty[$, avec $A > 2$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x) \in]A; +\infty[$.
5. Justifiez que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$.

Avec les théorèmes

Exercice 5 Limite en zéro

Soit $f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$. Étudiez sa limite en zéro.

Exercice 6 De la géométrie pour calculer une limite

Voici une première méthode de calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Pourquoi suffit-il d'étudier la limite pour des valeurs de $x > 0$?

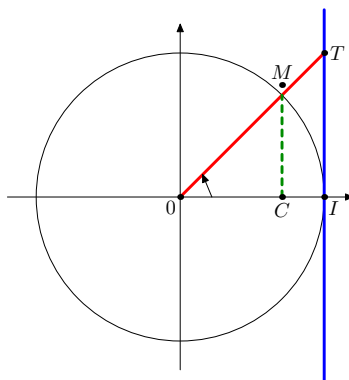


Figure 9 –

Utilisez la figure pour obtenir que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$\sin x < x < \tan x$$

Déduisez-en un encadrement de $\frac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$ et concluez après avoir étudié la parité de la fonction.

🔦 Exercice 7 Limites trigonométriques

En supposant connu le résultat de l'exercice précédent, calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Pour la 2ème, utilisez la formule bien connue $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

🔦 Exercice 8 Limite et radicaux

Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

À la découverte du logiciel XCAS

Le logiciel XCAS va être notre compagnon tout au long de l'année. Il a l'avantage de renfermer un logiciel de calcul formel, un tableur facilement programmable, un logiciel de géométrie interactive, et j'en passe et des meilleures, et tout ça gratuitement, c'est à dire que vous allez vous empresser de le télécharger (et oui, un ordinateur ne sert pas seulement de super play station) à l'adresse suivante

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Eparisse/irem.html>

Nous allons tout d'abord reprendre l'exercice 1.

On tape

$$f := x \rightarrow (2 * x^2 + 1) / x^2$$

On obtient ensuite les valeurs particulières demandées

$$f(1)$$

$$f(32)$$

Pour obtenir une valeur approchée, on tape

`evalf(f(32))`

Pour obtenir le graphique,

`plot(f(x))`

Pour obtenir le graphe seul, on clique sur `geo jaune`. Pour obtenir simultanément l'historique et le graphe, on clique sur le menu `Edit - fenêtres - 2 fenêtres`.

Pour obtenir un tableau de valeurs, on clique sur `mtrw`

Pour obtenir un tableau avec un pas de 1, on tape 1 en A0 puis =A0+1 en A1 puis on clique sur `remplir - vers le bas`.

En B0, on tape =f(A0) et on étire pour avoir les valeurs exactes.

En C0, on tape =evalf(B0) pour avoir les valeurs approchées.

On tape

`limit(f(x),x,+infinity)`

pour calculer la limite

Nous verrons bien d'autres applications. Nous apprendrons notamment à programmer XCAS pour ne pas s'en servir seulement comme une super calculatrice.

De l'autre côté du miroir...

Exercice 9 Étude expérimentale des branches infinies

On vous donnera généralement cette année une équation de l'asymptote et il vous suffira de vérifier qu'il s'agit bien d'une asymptote à l'aide d'un calcul de limite.

Mais comment obtient-on cette équation : c'est l'objet de cet exercice.

Comme l'a dit Téhessin, on obtiendra une asymptote au voisinage de l'infini si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax + b + e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = 0$$

mais comment trouver a et b s'ils existent?

1. Que pensez-vous de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$?
2. Que pensez-vous de $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$?
3. Étudiez les branches infinies des courbes dont on donne une équation. Donnez une équation des asymptotes lorsqu'elles existent.

a) $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^3}{x - 1}$

c) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$

d) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

e) $y = \frac{\sin x}{x}$

f) $y = 2x - \cos x$

Exercice 10 Développements limités

Préambule : Nous n'allons bien sûr pas nous lancer dans la théorie des développements limités que vous découvrirez l'an prochain. Nous allons juste jeter un petit coup d'œil expérimental sur une notion fondamentale de l'analyse : comment « approcher » localement des fonctions compliquées par des polynômes.

Nous aurons besoin d'un résultat « élémentaire » sur les limites qui constitue une application directe de la définition de la limite en un réel et qui se comprend assez bien

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = 1 \text{ et si } g \text{ est bornée au voisinage de } 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f-g}{g} = 0$$

Nous admettrons ce résultat.

1. En utilisant les résultats des exercices 6 et 7, montrez que, au voisinage de 0, on a les résultats suivant avec $\lim_{x \rightarrow 0} e(x) = 0$

- ▷ $\sin x = x + x \cdot e(x)$
- ▷ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot e(x)$
- ▷ $\tan x = x + x \cdot e(x)$
- ▷ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + x \cdot e(x)$

2. Sur XCAS ou votre calculatrice, tapez

```
plot([x, sin(x)], color=[red, green])
```

Regardez ce qui se passe pour $x \in [-1/2, 1/2]$ puis sur $[-10, 10]$. Faites de même pour les autres fonctions. Qu'en pensez-vous?

3. Toujours plus fort : calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1+x/2)}{x^2}$. Déduisez-en que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \cdot e(x)$$

Observez alors le graphique

```
plot([sqrt(1+x), 1+0.5*x, 1+0.5*x-0.125*x^2], color=[red, blue, green])
```

Commentaires?

4. Avec deux chapitres d'avance, parlons tangente : donnez une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 0. Des remarques?

Quelle est la position de la courbe par rapport à la tangente? Des remarques?