Première Aventure

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

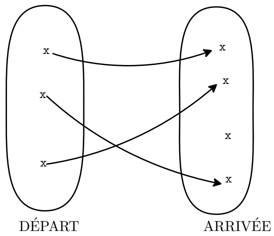
Résumé Où l'on revoie et développe les notions de limites, continuité, dérivation avec quelques nouveautés en faisant appel à la physique.

A - LIMITES

A - 1 : Préliminaires

A - 1 - a : Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée. Cela correspond typiquement au diagramme en patates suivant



Nous nous restreindrons dans ce chapitre aux fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.

A - 1 - b : Voisinage

Nous allons être amenés à distinguer des assertions vraies au « voisinage » d'un point et celles vraies sur tout l'ensemble de définition.
Un voisinage sera un intervalle qui « englobera » le point considéré. Mais le plus souvent, il s'agira d'un point critique qui n'appartiendra pas à l'ensemble de définition $\mathcal{D}$, voire même $\pm\infty$. Un voisinage sera donc l'intersection d'un intervalle englobant le point avec $\mathcal{D}$, en adaptant pour l'infini

Définition I-1Voisinage

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie ***au voisinage*** *de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $I \cap \mathcal{D}$*

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Une assertion est vraie ***au voisinage*** *de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $[a, +\infty[$*

En fait, retenez bien qu'en mathématiques il est très important de savoir sur quel ensemble on travaille : par exemple, est-ce que la fonction exponentielle est bornée sur $\mathbb{R}$?
C'est faux sur $\mathbb{R}$, c'est vrai au voisinage de $-\infty$.

A - 2 : Approche physique des différentes définitions

A - 2 - a : Limite finie en un réel

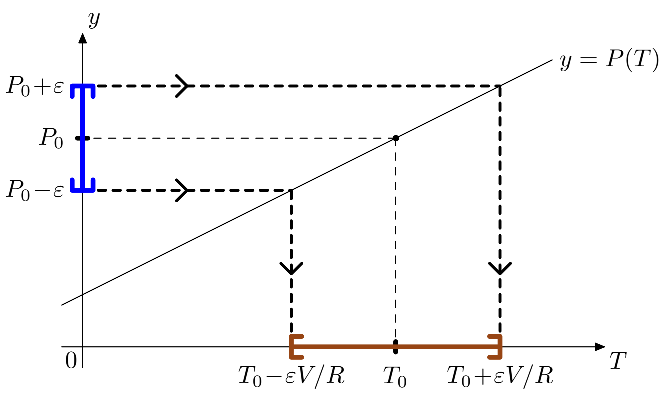
Vous connaissez peut-être la loi des gaz parfaits qui relie pression, volume et température d'une certaine masse de gaz dans certaines conditions

$$PV = RT$$

avec R une constante qui dépend de la nature du gaz et des unités employées.
Si on considère un gaz parfait dans un récipient à volume constant, la pression va donc varier en fonction de la température que l'on peut contrôler selon l'équation

$$P(T) = \frac{R}{V}T$$

Si l'on veut que la pression reste entre les valeurs $P_0 - \varepsilon$ et $P_0 + \varepsilon$, il suffit que l'on contrôle la température pour qu'elle se situe dans un certain intervalle qui dépendra de la précision ε choisie :



Si on utilise un formalisme mathématique, cela donne :

Définition I-2Limte finie en un réel
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, soit ℓ un réel et soit a un élément ou une extrémité finie de $\mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x appartenant à $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

Ça parait bien compliqué, notez tout de même qu'il existe des notations logiques simplifiant l'écriture : ∀ qui veut dire pour tout et ∃ qui veut dire il existe.

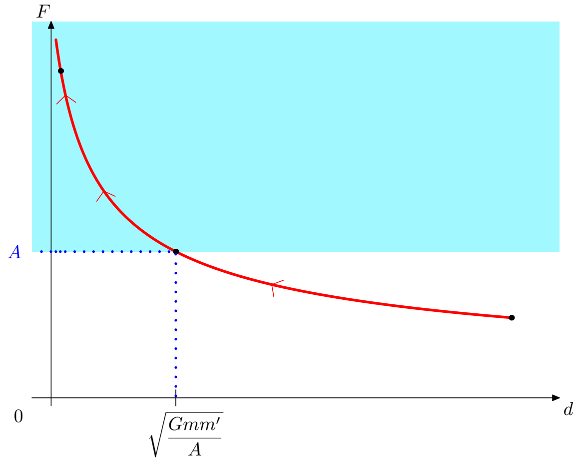
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha] \quad f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$

A - 2 - b : Limite infinie en un réel

Utilisons cette fois-ci la loi de Newton, donnant la force qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels de masses m et m' distants de d

$$F = G\frac{mm'}{d^2}$$

avec G la constante de l'attraction universelle.



Pour que F reste supérieure à une valeur arbitraire A, il suffit que les points matériels soient à une distance inférieure à $\sqrt{\dfrac{Gmm'}{A}}$

Mathématiquement, la formulation est

Définition I-3 Limite infinie en un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite si

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]a,a+\alpha] \cap I \quad f(x) \geqslant A$$

La formulation fait peur, mais j'espère que l'illustration physique est assez parlante.

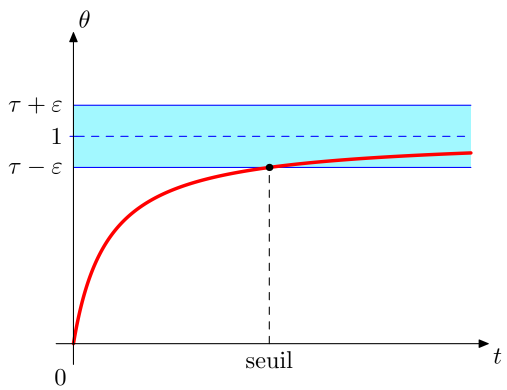
A - 2 - c : Limite finie en l'infini

Vous savez qu'au moment de démarrer votre 309 custom megabass, l'huile du moteur est froide puis la température d'huile augmente pour finir par se stabiliser autour de 90°C, que vous rouliez 30 minutes ou 32 heures (sauf incident).

On peut modéliser ce comportement en disant que la température θ de l'huile évolue en fonction du temps t selon la loi

$$\theta(t) = \tau\left(1 - e^{-kt}\right)$$

avec k une constante dépendant de la viscosité de l'huile et τ la température du régime stationnaire.



Ainsi, si l'on veut que la température θ reste comprise dans l'intervalle $]\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon[$, il suffit d'attendre suffisamment longtemps.
Cela donne en langage mathématique

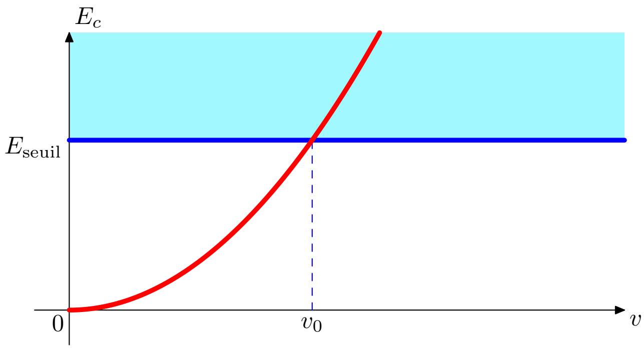
Définition I-4 Limite finie en l'infini
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

Je vous laisse bien sûr adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

A - 2 - d : Limite infine en l'infini

Vous connaissez la formule donnant l'énergie cinétique d'un solide de masse se déplaçant à la vitesse v

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$



Si l'on veut que l'énergie cinétique reste supérieure à une certaine valeur E_{seuil}, il suffit que la vitesse reste supérieure à une certaine valeur v_0 qui dépendra du choix de E_{seuil}.
Mathématiquement, cela donne

Définition I-5 Limite infinie en l'infini
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ lorsque, pour tout réel A strictement positif, l'intervalle $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand

A - 2 - e : À quoi servent les définitions des limites ?

Vous n'aviez vu que les deux dernières définitions en terminale, et dans toutes les autres sections de terminale, les élèves manipulent les limites sans connaître aucune de ces définitions. Alors, pourquoi les étudie-t-on ?

▷ Tout d'abord, d'un point de vue pratique, elles peuvent nous donner des moyens de calculs intéressants. Par exemple, vous vous souvenez que
$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$
donc, d'après la définition, il existe un réel A, tel que, pour tout $x > A$, $x^2e^{-x} \leqslant 1$, i.e.
$$\forall x > A \quad e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}$$
qui nous donne une majoration locale de e^{-x}, ce qui est appréciable car vous commencez à comprendre l'importance de savoir majorer et minorer en analyse [1].

1. Jean Dieudonné, un des plus grands mathématiciens français du XXe siècle disait même : « l'Analyse, c'est l'art de majorer et minorer »

- ▷ Ensuite, ces définitions vont nous permettre de démontrer les théorèmes qui suivent et que vous aviez admis les années précédentes.
- ▷ Ce qui nous amène au dernier point : en mathématiques, il est très dangereux de prendre une affirmation pour argent comptant, sans preuve. Les mathématiques doivent vous permettre d'acquérir un sens critique et les questions du style « Pourquoi ? Comment ? Dans quelles conditions ?... » doivent jaillir lorsque vous êtes confrontés à un nouveau concept.

A - 3 : Les théorèmes

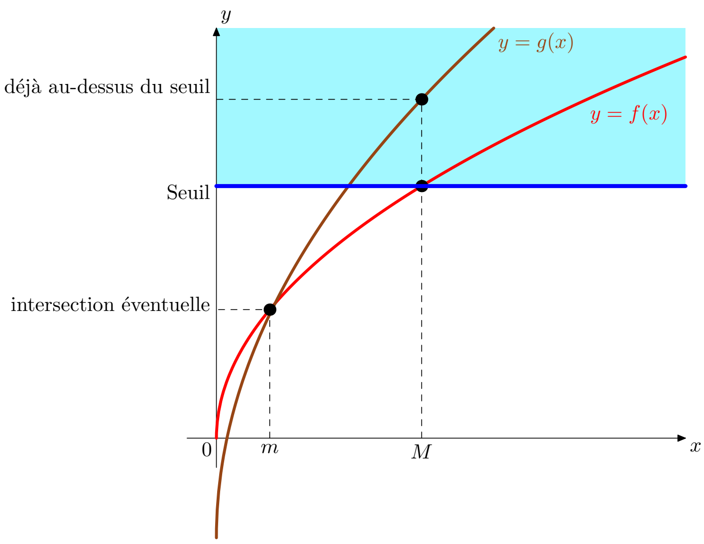
Rassurez-vous, dans la plupart des cas, nous pourrons utiliser les théorèmes que vous avez en fait découvert l'an passé, sans devoir repasser par les définitions. Cependant ces définitions sont nécessaires pour démontrer les théorèmes et vous font entrevoir qu'en mathématiques, il nous faut un point de départ solide pour vérifier si une affirmation est vraie ou fausse.

Mais avant toute chose, voici le principal théorème du cours

Théorème I-1
En analyse, un dessin avant de résoudre l'exercice tu feras

A - 3 - a : Théorèmes de comparaison

Ce théorème est résumé par le dessin suivant



à savoir

Théorème I-2
Si pour tout $x \geqslant m$ on a $g(x) \geqslant f(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

En fait, ça veut dire que si on est plus grand que quelque chose qui tend vers $+\infty$, on tend soi-même vers $+\infty$. Il existe le pendant en $-\infty$ que je vous laisse imaginer. Maintenant, le dessin est bien beau, mais il s'agirait de démontrer ce résultat. Or nous n'avons que la définition de la limite en magasin, donc utilisons-là.
On veut prouver que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant M$, on a $f(x) \geqslant A$

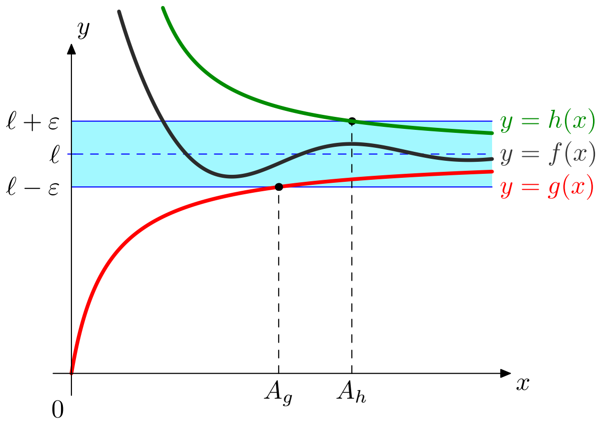
De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$

Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant A$, ce qui exprime que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par exemple $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $g(x) = \sqrt{x} + |\sin x| \geqslant \sqrt{x}$ pour tout réel x, donc par comparaison des limites on obtient que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

A - 3 - b : Théorèmes des gendarmes

Un nom qui fait un peut peur et qui laisse imaginer le pauvre prisonnier entouré de deux fiers à bras en uniforme. On aurait pu aussi l'appeler théorème des portes d'ascenseur, théorème de la mouche écrasée, théorème du rouleau compresseur, et j'en passe et des meilleures.
Comme d'habitude, l'idée vient d'un petit dessin



Une fonction f est coincée entre deux fonctions g et h qui tendent vers ℓ en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers ℓ en $+\infty$. Il ne reste plus qu'à trouver un énocé et une démonstration.

Théorème I-3 Théorème des gendarmes en l'infini
Soient f, g et h des fonctions et ℓ et A deux réels.
Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant A$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

La démonstration se déduit du dessin : on fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.
Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > A_g$ on a $g(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon$
Comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > A_h$ on a $h(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon$
Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > M$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On admettra que ce théorème s'applique aussi pour des limites en des valeurs finies (il suffirait pour le prouver d'utiliser les définitions des limites en des valeurs finies)

Théorème I-4 Théorème des gendarmes
Soient f, g et h des fonctions, ℓ et A deux réels et ω un réel ou l'infini.
Si $\lim_{x\to\omega} g(x) = \lim_{x\to\omega} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant A$, alors $\lim_{x\to\omega} f(x) = \ell$

Par exemple, nous pouvons maintenant étudier la limite de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

En effet, vous savez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Pour $x > 0$, on obtient donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

A - 3 - c : Opérations sur les limites

Vous connaissez cela depuis longtemps : on peut effectuer toutes les opérations sur les limites, sauf quatre : les quatre formes indéterminées (FI)

- ▷ $\infty - \infty$: il faudrait savoir qui est le plus fort des ∞. Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) - x$ sont toutes de la forme $\infty - \infty$, mais donnent des résultats tous différents.
- ▷ $0 \times \infty$: attention, le « 0 » ici est un abus d'écriture. Il ne représente pas 0 mais une expression qui tend vers 0. Il faudrait savoir qui est le plus fort, du 0 et de l'infini. Par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times \frac{1}{x}$ sont toutes de la forme $0 \times \infty$, mais donnent des résultats tous différents.
- ▷ $\frac{\infty}{\infty}$: c'est encore un rapport de force, ici entre numérateur et dénominateur. Trouvez trois exemples qui donnent des résultats différents.
- ▷ $\frac{0}{0}$: idem

A - 3 - d : Limites de fonctions composées

J'espère que vous êtes à l'aise dans la composition - décomposition de fonctions. Par exemple, décomposons la fonction $\varphi \ : \ x \mapsto e^{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires

$$x \xrightarrow{t \mapsto -3t+1} -3x+1 \xrightarrow{t \mapsto e^t} e^{-3x+1}$$

Supposons maintenant que vous vouliez étudier la limite de φ en $-\infty$. Nous allons être amenés à décomposer le calcul de limite. Pour nous guider, nous aurons besoin de la propriété (admise) suivante :

Propriété I-1

Soient ω, Ω et ℓ des réels ou l'infini et f et g deux fonctions, alors

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \Omega \\ \lim\limits_{T\to\Omega} g(T) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\omega} g \circ f(x) = \ell$$

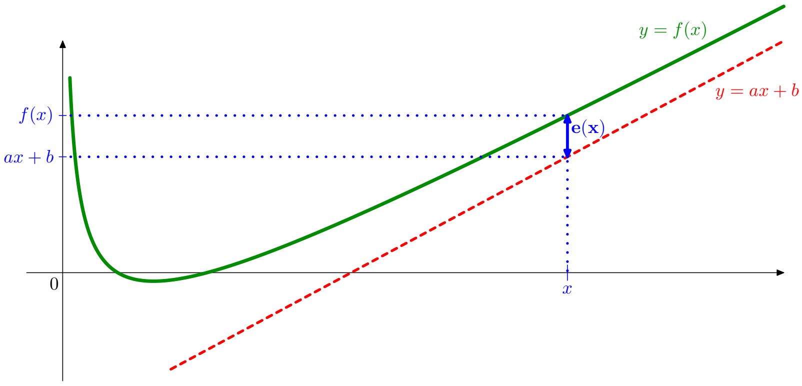
Appliquons cette propriété au cas étudié. Avec les couleurs, cela donne

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} e^T = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

A - 4 : Comportement asymptotique

A - 4 - a : Comment démontrer qu'une courbe admet une asymptote au voisinage de l'infini ?

Commençons comme d'habitude par un dessin



Pour traduire numériquement le fait que la courbe vient « se coucher » sur la droite, il faudrait mettre en évidence que $e(x)$ devient de plus en plus petit à mesure que x augmente. Il suffit de dire que $\lim_{x\to+\infty} e(x) = 0$. Or $e(x) = f(x) - (ax + b)$, donc

Théorème I-5

La courbe d'équation $y = f(x)$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

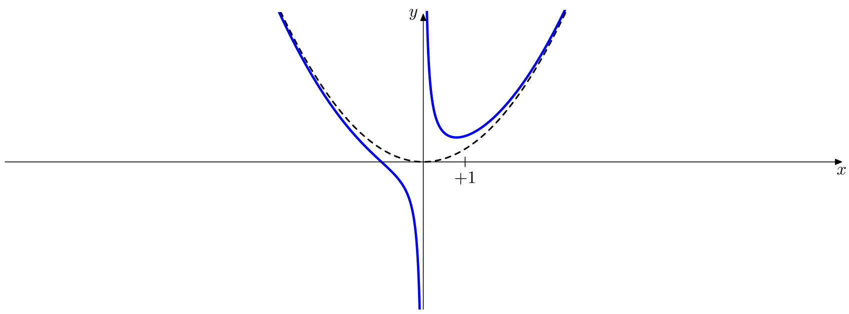
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

On obtient un théorème similaire en $-\infty$.

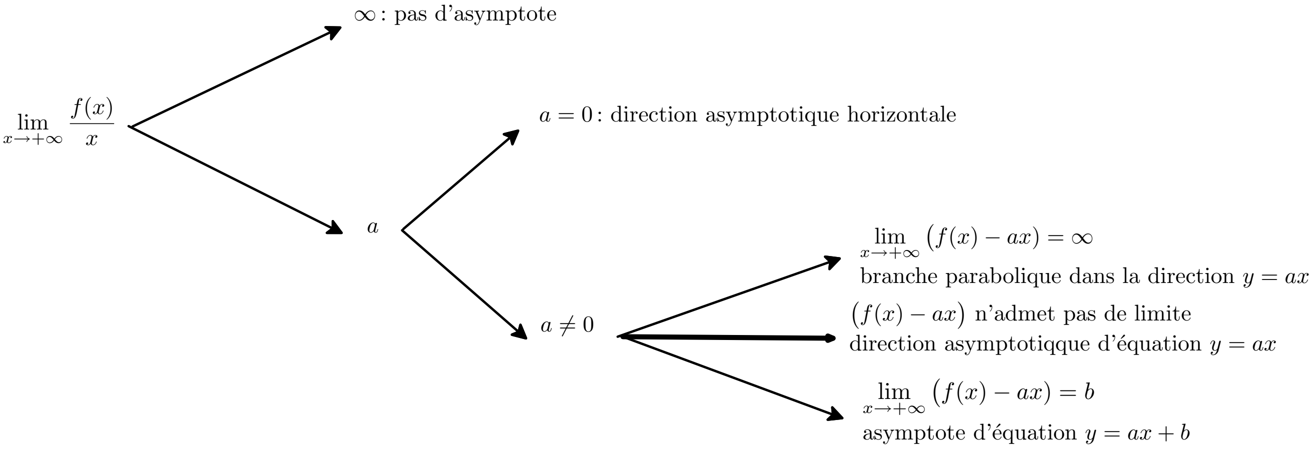
A - 4 - b : Si $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet -elle forcément une asymptote au voisinage de $+\infty$?

Il y a asymptote quand on peut écrire $f(x)$ sous la forme $x \mapsto ax + b + e(x)$ avec $e(x)$ qui tend vers 0 en l'infini, c'est à dire une partie affine plus une partie « qui compte pour du beurre ».

Mais ce n'est pas toujours le cas. Considérez par exemple $x \mapsto x^2 + 1/x$. La partie qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ n'est pas affine, donc la courbe ne va pas ressembler localement à une droite.



Il faudra donc suivre la procédure suivante lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$



A - 5 : Domination - Équivalence

A - 5 - a : Fonction négligeable devant une autre

Comme nous venons de le remarquer, il faudra cette année le plus souvent repérer à l'œil nu la limite en repérant les dominants et les dominés. Dans un exemple précédant, la fonction $x \mapsto x^2 + 1/x$, $1/x$ était le terme dominant et x^2 le terme dominé au voisinage de 0, donc c'est $1/x$ qui « portera » la limite. Mais au voisinage de l'infini, les rôles s'échangent.
C'est parfois moins visible.
Prenez par exemple $3x^2 - 132x + 27$ au voisinage de $+\infty$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée $\infty - \infty$. Mais regardez les graphes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$: vous voyez bien que x^2 est bien plus fort que x au voisinage de l'infini, et donc que c'est x^2 qui porte la limite qui sera donc $+\infty$. Mais cette considération n'est qu'un support à l'intuition, qui peut parfois être dangereuse. Pour le prouver par le calcul, on peut par exemple mettre le plus fort en facteur :

Pour tout $x \neq 0$, $3x^2 - 132x + 27 = x^2 \left(3 - \dfrac{132}{x} + \dfrac{27}{x^2}\right)$

Or

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{132}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{27}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - \dfrac{132}{x} + \dfrac{27}{x^2}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 132x + 27 = +\infty$$

Il existe des outils plus forts.

Définition I-6 Domination
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a (éventuellement l'infini). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulemnt s'il existe une fonction e vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad f(x) = e(x)g(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

Vous rencontrerez parfois la notation $f = o(g)$ (f est un petit o de g), mais mieux vaut utiliser celle proposée qui est moins dangereuse.
Il est équivalent de dire, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^2=0$, donc $x\mapsto x$ est négligeable devant $x\mapsto x^3$ au voisinage de $+\infty$, mais $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, donc $x\mapsto x^3$ est négligeable devant $x\mapsto x$ au voisinage de 0
Vous aurez encore remarqué qu'il s'agit d'un problème local.

A - 5 - b : Fonctions équivalentes

Il est aussi parfois utile de savoir si deux expressions sont « de même force ». Par exemple, vous savez que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, c'est à dire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}-1=0$, ou encore qu'il existe une fonction e telle que $\lim\limits_{x\to 0}e(x)=0$ vérifiant $\dfrac{\sin x}{x}=1+e(x)$ soit finalement

$$\sin x = x + xe(x)$$

Ainsi, localement autour de 0, les fonction $x\mapsto\sin x$ et $x\mapsto x$ sont égales, à une fonction négligeable devant elles près. On dira qu'elles sont *équivalentes* au voisinage de zéro.

Définition I-7 Fonctions équivalentes
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a (éventuellement l'infini). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulemnt si $f-g$ est négligeable devant g, i.e. s'il existe une fonction e vérifiant

$$\forall x\in\mathcal{V}\quad f(x)-g(x)=e(x)g(x)\quad \textit{avec}\quad \lim_{x\to a}e(x)=0$$

Vous rencontrerez parfois la notation $f\backsim g$.
Il est équivalent de dire, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

B - CONTINUITÉ

B - 1 : Continuité en un point

B - 1 - a : Qu'est-ce qu'une fonction continue en un point ?

Voici la définition de la continuité d'une fonction en un point

Définition I-8 Continuité en un point
Soit a un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a. On dit que ***f est continue en a*** *lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.*

On ne voit pas trop l'utilité de cette définition, qui reprend celle de la limite en un point. En fait, nous allons voir que la continuité d'une fonction sur un intervalle va nous permettre de résoudre de nombreux problèmes, mais en physique, les fonctions sont rarement continues. La définition précédente va en fait nous aider parfois à « rendre continues » certaines fonctions en les prolongeant par continuité.

B - 1 - b : Qu'est-ce que prolonger une fonction par continuité ?

Il y a plusieurs cas de discontinuité d'une fonction en un point.
Il y a par exemple le cas des fonctions qui ont une limite à droite et une limite à gauche différente, comme par exemple la fonction signe

$$\text{signe} \ : \ x \mapsto \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \ x > 0 \\ -1 & \text{si} \ \ x < 0 \end{cases}$$

On voit donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \text{signe}(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \text{signe}(x)$.

Plus intéressant est le cas où les deux limites sont égales. Par exemple, la fonction sinus amorti très utilisée en physique vérifie

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Il suffit donc de créer une fonction

$$g \ : \ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

qui est maintenant continue en zéro. On a prolongé la fonction sinus amorti par continuité en 0.

B - 2 : Continuité sur un intervalle

B - 2 - a : Qu'est-ce qu'un intervalle ?

On ne peut pas rentrer dans les détails. On retiendra que c'est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de « trou ». Par exemple, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

B - 2 - b : Qu'est-ce qu'une fonction continue sur un intervalle ?

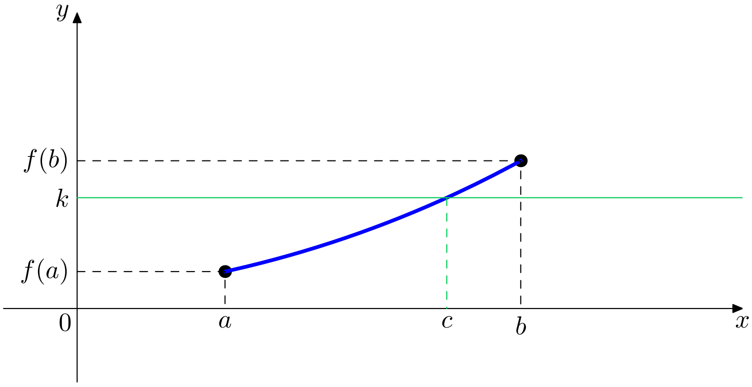
Définition I-9 Continuité sur un intervalle
Une fonction est continue sur un intervalle si ellle est continue en chaque point de cet intervalle

Il est bien sûr impossible de vérifier la continuité d'une fonction en chaque point. Nous admettrons que les fonctions polynômes, exponentielles, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, que les fonctions rationnelles, racine carrée, logarithme, tangente sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que leurs combinaisons linéaires et leurs composées. On invoquera ces résultats par la phrase magique « d'après les théorèmes généraux... »

B - 3 : Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

B - 3 - a : Comment montrer qu'une équation admet au moins une solution ?

La situation est résumée par le dessin suivant



et l'énoncé

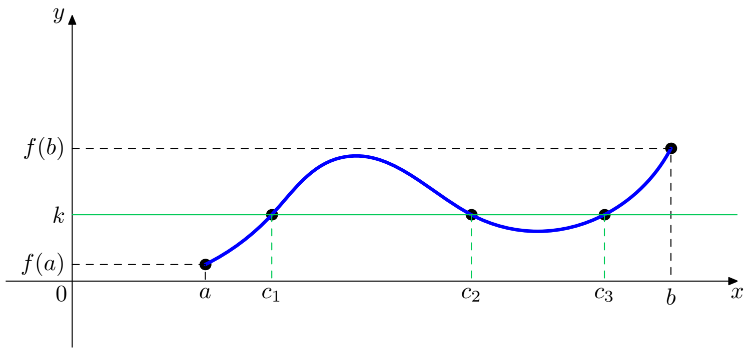
Théorème I-6 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Une conséquence importante est qu'une fonction continue sur un intervalle qui change de signe, s'annule sur cet intervalle.
On peut montrer aussi que deux courbes représentatives de fonctions continues se croisent en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.
On montre aussi que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

B - 3 - b : Comment monter qu'une équation admet une unique solution ?

Le TVI montre l'existence d'au moins une solution. Si l'on a besoin de l'unicité, cela ne suffit pas



On a besoin de la stricte monotonie de f pour assurer l'unicité

Théorème I-7 Théorème de la solution unique

*Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.*

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel nous permettra de programmer la résolution d'une équation par dichotomie grâce à ces théorèmes comme nous le verrons en TD.