

Des fonctions « électriques »

Échelon de Heaviside

1. Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité ^a

On considère le circuit très simple ci-contre. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on mesure la tension $U(t)$. Elle peut être définie par

$$t \mapsto U(t) = \begin{cases} E & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Représentez graphiquement la fonction U.

2. On note f la fonction $f : t \mapsto U(t-2)$ et $g : t \mapsto U(t+2)$.

En électricité, on appelle l'une *échelon retardé* et l'autre *échelon avancé* ; pourriez-vous dire qui est qui ?

Fonction porte

Représentez la fonction $\Pi : x \mapsto \begin{cases} E & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ -E & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$

Donnez une interprétation physique de cette fonction si x représente la fréquence d'un signal émis par un émetteur radio.

Signal carré

Pour s'amuser, on fait varier le sens du courant. Représentez la fonction φ qui est de période 1 et vérifie

$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 < t < 1/2 \\ -E & \text{si } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

Signal triangulaire

1. Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie, pour tout $x \in [0; 1/2[$

$$T(x) = E - 2Ex$$

Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2; 0]$

2. On considère la fonction Λ définie sur \mathbb{R} par

$$\Lambda : t \mapsto tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$$

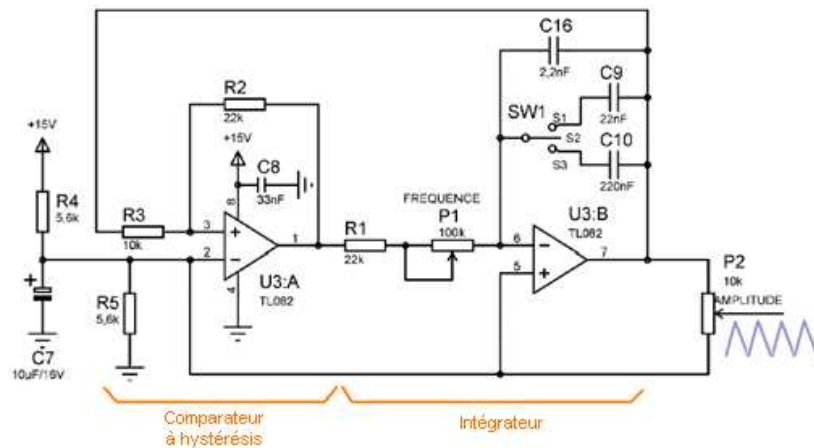
où U est la fonction de Heaviside étudiée précédemment.

Représentez graphiquement cette fonction en distinguant les intervalles $]-\infty; 0[$, $[0; 1[$, $[1; 2[$ et $[2; +\infty[$.

3. Donnez un nom à la fonction suivante d , de période 1, telle que $d(x) = Ex$ pour tout $x \in [0; 1[$.

^aet aussi en infographie, en musique, etc.

Rien de plus simple qu'un signal triangulaire... et pourtant, voici le circuit le produisant :



Fonctions causales

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $] -\infty; 0]$.

Pour les exprimer, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

a) $f_1 : x \mapsto U(x) \sin x$

c) $f_3 : x \mapsto U(x - \pi) \sin x$

b) $f_2 : x \mapsto U(x) \sin(x - \pi)$

d) $f_4 : x \mapsto U(x - \pi) \sin(x - \pi)$

Heaviside



Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) était un physicien britannique auto-didacte.

Bien qu'il eût de bons résultats scolaires, il quitta l'école à l'âge de seize ans et devint opérateur de télégraphe. Cependant il a continué à étudier et, en 1872, alors qu'il travaillait comme chef opérateur à Newcastle-upon-Tyne, il commença à publier ses résultats de recherche en électricité. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.

Entre 1880 et 1887 il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires ce qui lui valu beaucoup de controverse lorsqu'il l'introduisit pour la première fois, du fait d'un manque de rigueur dans l'utilisation de la dérivation.

En 1887, il suggéra que des bobines d'induction devraient être ajoutées au câble du téléphone transatlantique afin de corriger la distorsion dont il souffrait. Pour les raisons politiques, cela n'a pas été fait.

En 1902 il prédit l'existence de couches conductrices pour les ondes radio qui leur permettent de suivre la courbure de la terre ; ces couches, situées dans l'ionosphère, sont appelées couches de Kennelly-Heaviside, du nom de Arthur Kennelly, physicien américain qui eut la même intuition que lui. Elles ont finalement été détectées en 1925 par Edward Appleton.

Il a développé aussi la fonction de Heaviside (aussi appelée échelon ou marche), utilisée communément dans l'étude de systèmes en automatique et il a étudié la propagation des courants électriques dans les conducteurs.

Des années plus tard son comportement devint très excentrique...