HUITIÈME LEÇON

DÉNOMBREMENTS

I - Permutations

Le Père Noël a offert à ma petite cousine Josette un jeu de cubes où sont inscrits les lettres de l'alphabet.
Très pédagogue, je lui donne d'abord les trois cubes A, B et C. Combien de « mots » de 3 lettres peut-elle alors former ? Et si je lui en donne quatre ? vingt-six ? trente-deux ?
Moralité : avec un ensemble *(non ordonné)* $\{a, b, c\}$ de trois éléments, je peux former $3 \times 2 \times 1$ listes *(ordonnées)*, comme par exemple (a, b, c), (b, a, c), (c, b, a), etc.
Je peux donc *permuter* 3 cubes de $3 \times 2 \times 1$ manières différentes.

Définition 8.1
Soit n un entier naturel non nul. Le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ est appelé **factorielle n**. On note

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Conventionnellement, $0! = 1$.

D'après notre petite étude, nous pouvons donc dire maintenant que

Théorème 8.1
Le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments est $n!$.

Exemples :

▷ il y a trente-deux chaises dans une salle. *Dénombrer* toutes les manières possibles pour les élèves de TS_5 d'occuper les chaises de la salle.

▷ Combien y a-t-il d'annagrammes du mot ZOÉ ?

du mot ANA ?

II - Combinaisons

Il n'y a pas assez de gagnants au loto. Les règles en sont donc modifiées. Il s'agit maintenant de trouver 3 numéros parmi 5. Combien y a-t-il de grilles (combinaisons) possibles ?
Par exemple, on pourrait dire que j'ai cinq manières de choisir le premier numéro, quatre choix pour le deuxième et trois choix pour le troisième, donc il y a $5 \times 4 \times 3$ grilles différentes,
MAIS

Posons une petite définition pour clarifier les débats. Donnons en fait un nom à une grille du loto, c'est à dire à un sous-ensemble (une partie) contenant p éléments d'un plus grand ensemble contenant n éléments.

Définition 8.2
Soit n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une **combinaison** de p éléments de E ou encore une ***p*-combinaison** d'éléments de E.

Or ce qui nous intéresse, c'est le nombre de ces combinaisons, donc introduisons une notation

Définition 8.3
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté $\binom{n}{p}$ ou encore C_n^p

Revenons à notre mini-loto. Considérons une grille quelconque (c'est à dire une 3-combinaison de l'ensemble des 5 numéros) : par exemple $\{2,4,5\}$. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il y a 3! facons d'ordonner ces nombres. Finalement, il y a $\binom{5}{3} \times 3!$ suites de 3 nombres ordonnées. Or nous en avons comptées $5 \times 4 \times 3$ tout à l'heure. Nous en déduisons finalement que

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}$$

Il est alors aisé de généraliser la formule suivante :

Propriété 8.1

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))}{p!}$$

Nous pouvons formuler cette propriété plus synthétiquement. En effet

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d'où

Théorème 8.2

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

III - Triangle de Pascal - Binôme de Newton

a. Raisonnement calculatoire

À l'aide des formules précédentes, établissez que

Propriété 8.2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Établissez, toujours par le calcul, la relation suivante, dite **Relation de Pascal** même si les mathématiciens chinois l'avaient mise en évidence avant lui

Propriété 8.3

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Cette relation permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, ce qui s'avère fort utile car la fonction factorielle croît extrêmement rapidement et dépasse vite les capacités d'une calculatrice de poche.
Ainsi, la procédure suivante permet de calculer les coefficients binomiaux assez rapidement avec **XCAS**

```
combi(p,n):={
 si p=0 alors 1;
 sinon si p>n alors 0;
       sinon combi(p,n-1)+combi(p-1,n-1);
       fsi
 fsi
}:;
```

Mais que viennent faire les deux conditions : `si p=0` et `si p>n` ?

b. Raisonnement ensembliste

Si je forme un groupe de 3 élèves dans la classe, j'obtiens du même coup un groupe de 26 élèves puisque vous êtes 29.
Si l'on compte le nombre de parties A ayant p éléments dans un ensemble E, il revient au même de compter le nombre de parties complémentaires de A. En quoi ce raisonnement nous permet-il d'obtenir une des formules précédentes ?

Considérons la classe de TS5 et ses 29 élèves. Je veux dénombrer les groupes de trois élèves. On peut distinguer deux types de groupes

- ▷ ceux qui ne vous contiennent pas : il faut donc former des groupes de 3 avec les 22 élèves restant : ça fait combien ?
- ▷ ceux qui vous contiennent : on vous ajoute aux groupes de 2 formés avec les 22 élèves restant. Ça fait combien ?

Tenez un raisonnement similaire pour établir la relation de Pascal.

c. Formule du binôme de Newton

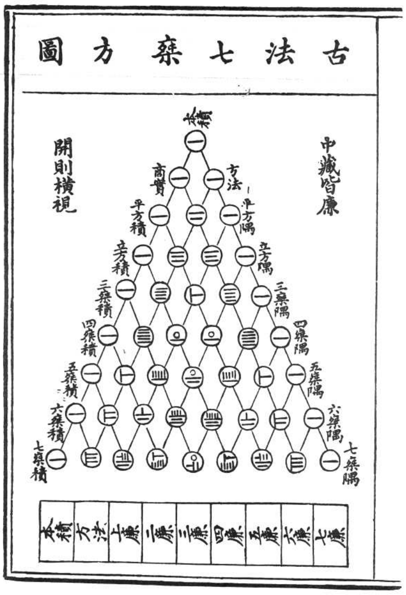
Sir Isaac n'a pas fait que dormir sous un pommier. Il a par exemple établi que

Théorème 8.3
Soit a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

On peut prouver cette formule par récurrence en remarquant que $(a+b)^{k+1} = a(a+b)^k + b(a+b)^k$ et en utilisant la relation de Pascal au bon moment.

Cette formule nous permet donc d'obtenir de nouveaux « produits remarquables », à conditions de connaître les coefficients binomiaux.
Testez la formule aux rangs 2, 3, 4, 5. Disposez vos résultats dans un tableau en n'écrivant que les coefficients et conjecturer le triangle de Pascal...



IV - Exercices

Exercice 1 Coefficients binomiaux

1. Donnez une expression simple de $\binom{n}{0}$, de $\binom{n}{1}$, de $\binom{n}{n}$, de $\binom{n}{n-1}$. Utilisez des simplifications pour calculer à la main $\binom{20}{3}$.

2. On donne $\binom{13}{5} = 1287$ et $\binom{13}{6} = 1716$. Calculez alors à la main $\binom{13}{8}$ et $\binom{14}{9}$

Exercice 2 Une vieille connaissance

Donnez une nouvelle démonstration très rapide de la formule bien connue : $(1+x)^n > 1+nx$

Exercice 3 Nombre de parties

Combien y a-t-il de parties d'un ensemble ayant n éléments ?

Exercice 4 Type Bac avec ROC

1. **Démonstration de cours.** Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.
On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a) Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\overline{\text{A}}$, contraire de A.
En déduire la probabilité de A.

b) Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide la formule obtenue à la question **2.**, que l'on retrouve le même résultat.

Exercice 5

Calulez $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^5 t \,\mathrm{d}t$

Exercice 6

Périclès est goutteur d'olives dans une usine grecque. Un matin, il goutte cent olives au hasard et les replace dans le réservoir.
L'après-midi, l'ouzo de l'apéritif lui a fait perdre la mémoire. Il goutte à nouveau cent olives dans le même réservoir. Douze d'entre elles avaient déjà été machées.
On note A l'événement « il y a douze olives machées parmi les cent choisies » et B_n l'événement « il y a n olives dans le réservoir ».
On considère la fonction f définie pour les entiers supérieurs à cent par

$$f(n) = p_{\text{B}_n}(\text{A})$$

et la suite (u_n) définie pour les entiers supérieurs à 100 par

$$u_n = f(n+1)/f(n)$$

1. Comparez u_n à 1.

$$u_n = \frac{\binom{100}{12}\binom{n-100}{88}\binom{n+1}{100}}{\binom{100}{12}\binom{n-99}{88}\binom{n}{100}}$$

2. Montrez que la fonction f atteint un maximum sur $[\![100, +\infty[\![$.

3. On appelle *maximum de vraissemblance* m la valeur de n correspondant à ce maximum. Déterminez m.

Réponse : $m = 833$

Exercice 7 Le poker

Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ?
Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

Réponse : 624 carrés, 3744 fulls, 54912 brelans 123552 doubles paires, 1 098 240 paires.

Exercice 8 L'âge du capitaine

Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la $7^{\text{ème}}$ rue et de la $33^{\text{ème}}$ avenue. La caserne se trouve à l'angle de la $15^{\text{ème}}$ rue et de la $40^{\text{ème}}$ avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ?

Réponse : maximum 35 ans.

Exercice 9 Calcul de coefficients binomiaux

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

1. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

3. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^{7}\binom{x-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.