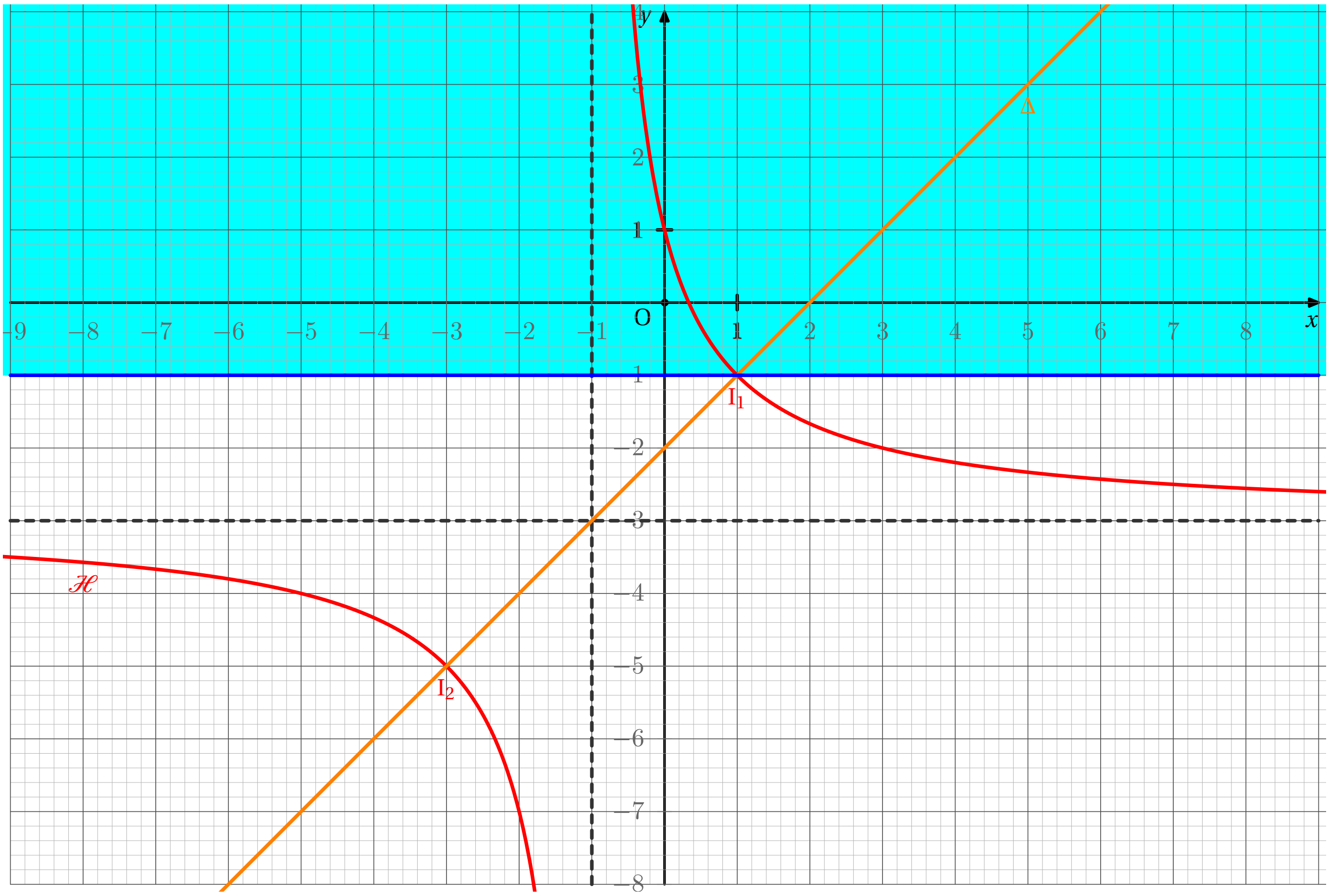
Corrigé DS commun 2^nde - 9 mai 2007

Exercice 1



1. a) Voir graphique.

b)
$$\begin{aligned} 4-(x+1)^2 &= 4-(x^2+2x+1)\\ &= 4-x^2-2x-1\\ &= 3-x^2-2x \end{aligned}$$

c) (E) : $\frac{4}{x+1}-3=x-2$

(E) $\iff \frac{4}{x+1}=x+1$

(E) $\iff 4=(x+1)^2$ et $x\neq 1$

(E) $\iff x+1=2$ ou $x+1=-2$

(E) $\iff x=1$ ou $x=-3$

$\mathscr{S}=\{-3\,;1\}$

d) Nous venons de résoudre l'équation $f(x)=h(x)$, c'est-à-dire que nous venons de déterminer les abscisses des points communs à $(\mathscr{H})$ et Δ.

Comme ces points appartiennent à Δ, leurs coordonnées vérifient l'équation $y=x-2$ et donc les coordonnées des points sont

$$\mathrm{I}_1(-3,-5) \qquad \mathrm{I}_2(1,-1)$$

2. a) Voir graphique

b) Résolvons l'inéquation (I) : $f(x) \geqslant -1$

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &\iff \tfrac{4}{x+1} - 3 \geqslant -1\\
\text{(I)} &\iff \tfrac{4}{x+1} - 2 \geqslant 0\\
\text{(I)} &\iff \tfrac{4}{x+1} - \tfrac{2(x+1)}{x+1} \geqslant 0\\
\text{(I)} &\iff \tfrac{4-2x-2}{x+1} \geqslant 0\\
\text{(I)} &\iff \tfrac{2(1-x)}{x+1} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à étudier le signe de $\frac{2(1-x)}{x+1}$. Étudions le signe de chaque facteur :

$x+1 \geqslant 0$	$1-x \geqslant 0$
$x \geqslant -1$	$1 \geqslant x$

Regroupons les résultats dans un tableau de signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\frac{2(1-x)}{x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. a) Par lecture graphique nous obtenons

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de f	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-3

4. Considérons deux nombres distincts a et b de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, alors on obtient successivement

$$\begin{aligned}
-1 < a &< b\\
0 < a+1 &< b+1\\
\tfrac{1}{a+1} &> \tfrac{1}{b+1} \qquad \text{car la fonction inverse inverse le sens de comparaison des nombres positifs}\\
\tfrac{4}{a+1} &> \tfrac{4}{b+1}\\
\tfrac{4}{a+1} - 3 &> \tfrac{4}{b+1} - 3\\
f(a) &> f(b)
\end{aligned}$$

La fonction f inversant le sens de comparaison sur $]-1\,;+\infty[$, elle est décroissante sur cet intervalle.

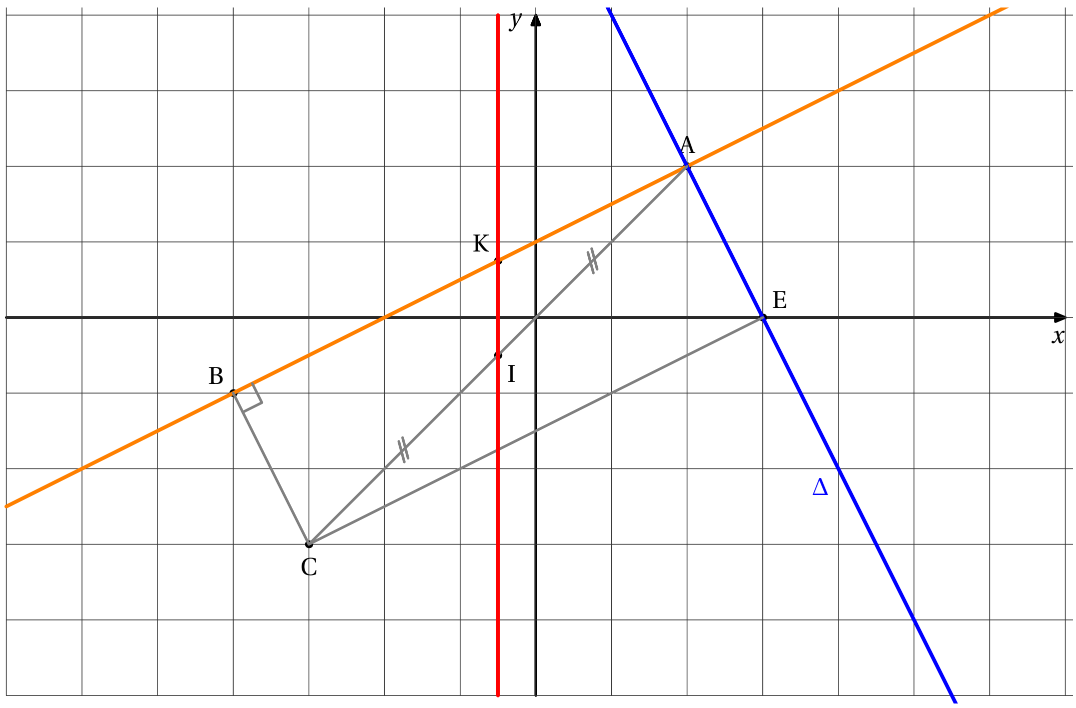
Exercice 2

1. Soit M un point de coordonnées $(x\,;y)$. Alors M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ y-2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Nous obtenons $-3(x-2)-(-6)(y-2)=0$ et finalement (AB) admet pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x + 1$.

2. On trace Δ et la droite (AB) :



3. L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. Le point E vérifie donc le système (S) : $\begin{cases} y = -2x+6 \\ y = 0 \end{cases}$. On obtient alors successivement : (S) $\iff \begin{cases} 0 = -2x+6 \\ y = 0 \end{cases}$ (S) $\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. Le point E donc pour coordonnées $(3;0)$.

4. Le repère étant orthonormal, on peut utiliser la formule $\text{AB} = \sqrt{(x_\text{B}-x_\text{A})^2+(y_\text{B}-y_\text{A})^2}$. On obtient alors successivement :

- $\text{AB} = \sqrt{(-4-2)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{45}$
- $\text{AC} = \sqrt{(-3-2)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{50}$
- $\text{BC} = \sqrt{(-3+4)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{5}$

On vérifie que $\text{AB}^2+\text{BC}^2 = \text{AC}^2$, et on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

5. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}$. On obtient $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-3+1\\-3+4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AE}}\begin{pmatrix}0-2\\3-2\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{AE}}$. Le quadrilatère ABCE est donc un parallélogramme. Or un de ses angles étant droit, ce parallélogramme est un rectangle.

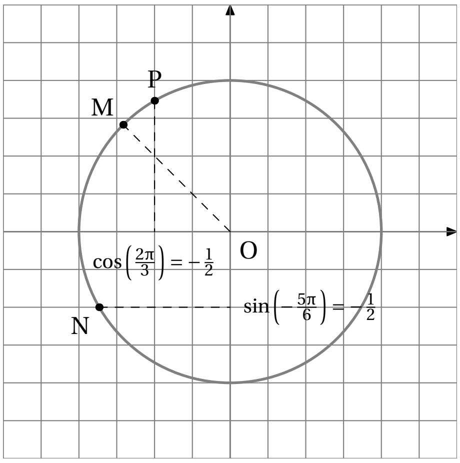
6. Par la méthode du « petit poisson », on obtient respectivement :

- (BC) : $\begin{vmatrix} x+4 & 1 \\ y+1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire $y = -2x-9$
- (CE) : $\begin{vmatrix} x+3 & 6 \\ y+3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

7. Le milieu I de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{2-3}{2} ; \frac{2-3}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.
Le point K appartenant à une droite parallèle à l'axe des ordonnées, son abscisse est la même que celle de I, donc $x_\text{K} = -\frac{1}{2}$.
Or K appartient aussi à la droite (AB), donc ses coordonnées vérifient son équation : $y_\text{K} = \frac{1}{2}x_\text{K} + 1 = \frac{3}{4}$.
Finalement, K a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right)$.

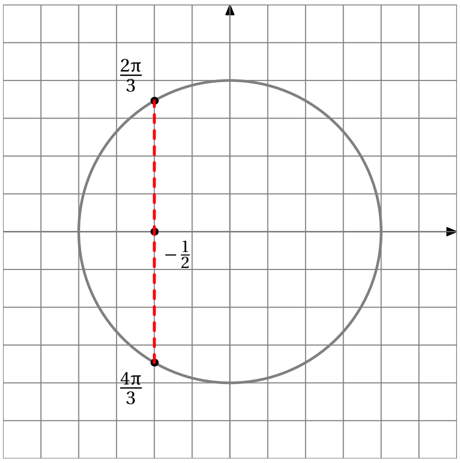
Exercice 3

1. Pour P, on remarque que $\frac{26\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$



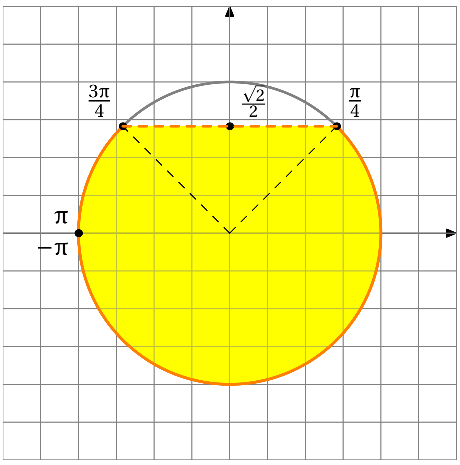
2. On sait que pour tout réel x, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.
Nous en déduisons que $\sin(x) = \pm\frac{3}{5}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$, donc $\sin(x) < 0$.
Finalement $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

3. a) Observons le cercle trigonométrique :



Nous en déduisons que $\mathscr{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) Observons le cercle trigonométrique :



Nous en déduisons que $\mathscr{S} = \left[-\pi ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4} ; \pi\right]$

Exercice 4

Les points N,R,D et A appartiennent à la face (ADC) et les droites (NR) et (AD) ne sont pas parallèles : elles se coupent donc en un point K appartenant à la droite (AD) donc au plan (BAD).
Comme K appartient à (NR), il appartient en particulier au plan (MNR).
La droite (KM) passant par deux points de (BAD) coupe (DB) en un point L et (AB) en un point J.
La droite (KM) passant par deux points de (MNR), elle est incluse dans (MNR) : les points J et L appartiennent donc aussi au plan (MNR).
Finalement, la section cherchée est la surface délimitée par le polygone JNRL.