SGM1 CORRECTION DS de mathématiques n°2

.

Mardi 17 janvier 2006

Exercice 1

Soit $F(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+20x-8}{x^2+2x+10}$

1. Déterminez les pôles complexes de F.

On cherche les valeurs de x qui annulent $x^2+2x+10$. $\Delta = -36 = (6i)^2$, donc les deux pôles complexes sont $-1-3i$ et $-1+3i$.

2. Effectuez la division euclidienne de $2x^3+3x^2+20x-8$ par $x^2+2x+10$.

$$
\begin{array}{lrr|l}
\mathrm{A} & 2x^3+3x^2+20x-8 & & x^2+2x+10 \\
\cline{4-4}
\mathrm{BQ_1} & 2x^3+4x^2+20x & . & \underbrace{2x}_{\mathrm{Q_1}}\ \underbrace{-1}_{\mathrm{Q_2}} \\
\mathrm{A_1} = \mathrm{A}-\mathrm{BQ_1} & . & -x^2 \qquad -8 & \\
\mathrm{BQ_2} & . & -x^2-2x-10 & \\
\mathrm{R} = \mathrm{A_1}-\mathrm{BQ_2} & . & 2x+2 &
\end{array}
$$

C'est à dire $2x^3+3x^2+20x-8 = (2x-1)(x^2+2x+10)+2x+2$

3. Déduisez-en la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Donc $F(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+20x-8}{x^2+2x+10} = 2x-1+\dfrac{2x+2}{x^2+2x+10}$

4. Calculez alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{1} F(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x-1\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \left[x^2-x\right]_{-1}^{1} + \left[\ln(x^2+2x+10\right]_{-1}^{1} = -2+\ln\left(\frac{13}{9}\right)$$

Exercice 2

1. Linéarisez $\cos^3 x$ à l'aide de la formule d'Euler.

$$\cos^3(x) = \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{2^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\right) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

2. Déduisez-en $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{2\pi/3} \cos^3 x\,dx$

$$\int_{-\pi/6}^{2\pi/3} \cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_{-\pi/6}^{2\pi/3} + \frac{3}{4}\left[\sin x\right]_{-\pi/6}^{2\pi/3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Exercice 3

On rappelle que les coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène limité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$ sont données par les formules

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx} \qquad y_G = \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$$

Calculez ces coordonnées dans le cas où $a=0$, $b=1$, $f(x)=2e^{-3x}$.

$$\int_0^1 2e^{-3x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2e^{-3x}}{-3}\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-e^{-3})\qquad \int_0^1 4e^{-6x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4e^{-6x}}{-6}\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-e^{-6})$$

Pour $\displaystyle\int_0^1 2xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$ une Ipp $\begin{cases} u(x)=2x & u'(x)=2 \\ v'(x)=e^{-3x} & v(x)=e^{-3x}/-3 \end{cases}$

$$\int_0^1 2xe^{-3x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2xe^{-3x}}{-3}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1 e^{-3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}e^{-3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3}\right)$$

$$x_G=\frac{1}{3}\times\frac{1-4e^{-3}}{1-e^{-3}}\qquad\qquad y_G=\frac{1}{2}\times\frac{1-e^{-6}}{1-e^{-3}}$$

Exercice 4

Calculez les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{6}+1}\frac{4}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$

$x^2-2x+3=(x-1)^2+2$, donc $\displaystyle\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{6}+1}\frac{4}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{6}+1}\frac{4}{2\left(\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x$

On effectue le changement de variable $u=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$, $u_{bas}=\dfrac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{2}}=1$, $u_{haut}=\dfrac{\sqrt{6}+1-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

$$\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{6}+1}\frac{4}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=2\sqrt{2}\,[\operatorname{Arctan}u]_1^{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Le changement $x\to\pi-x$ laisse l'intégrale inchangée, donc on effectue le changement de variable $t=\sin x$, alors $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$, $t_{bas}=\sin 0=0$, $t_{haut}=\sin\left(\pi/2\right)=1$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\operatorname{Arctan}t\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$