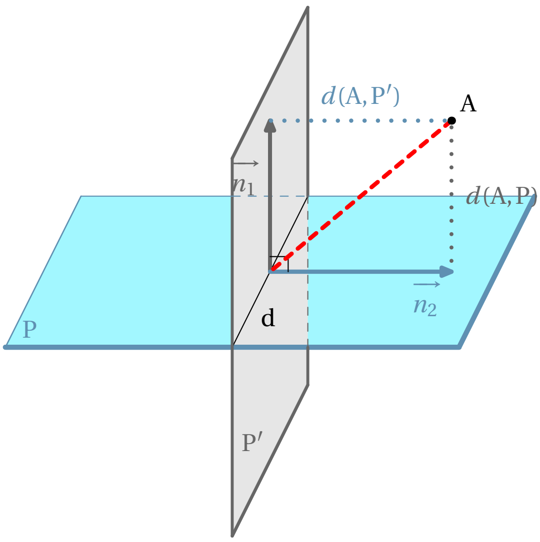
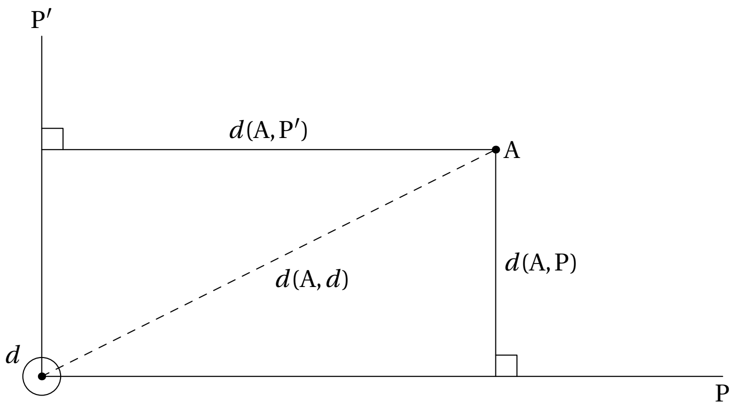
# Bac S - Juin 2007 - Obligatoire

## Exercice 1

1. Le plan (P) admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;2\,;-1)$ et (P′) admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $(-1\,;1\,;1)$.
   Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'}=-1+2-1=0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux. Nous en déduisons que (P) et (P′) sont perpendiculaires.
2. Soit $M_t$ un point quelconque de $(d)$. Il existe donc un réel $t$ tels que ses coordonnées sont $(-1/3+t\,;-1/3\,;t)$.
   Or les coordonnées de $M_t$ vérifient les équations de (P) et (P′), donc la droite (d) est incluse à la fois dans (P) et dans (P′), donc dans leur intersection.
   D'autre part, les deux plans sont orthogonaux, donc leur intersection est une droite. Il s'agit donc de $(d)$.
3. Le repère étant orthonormal, les distances sont données par
   – $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{P})=\dfrac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
   – $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{P'})=\dfrac{|0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
4. Voici la situation




Une figure dans un plan orthogonal à $(d)$ s'impose




$d(\mathrm{A}, d) = \sqrt{\big(d(\mathrm{A},\mathrm{P})\big)^2 + \big(d(\mathrm{A},\mathrm{P}')\big)^2} = \sqrt{2}$

## Exercice 2

**1.** Voir cours

**2.** a) On intégre par parties de deux manières différentes

▷ On pose $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x & u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) & v(x) = -\cos(x) \end{cases}$. On obtient $\mathrm{I} = \Big[-\mathrm{e}^x\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = e^{\pi} + 1 + \mathrm{J}$

▷ On pose $\begin{cases} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$. On obtient $\mathrm{I} = \Big[\mathrm{e}^x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \mathrm{J} = -\mathrm{J}$

b) Nous en déduisons que $\mathrm{I} = -\mathrm{I} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$ et donc

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2} = -\mathrm{J}$$

## Exercice 3

### Partie A

**1.** $\mathrm{P(i)} = \mathrm{i}^3 - (4+\mathrm{i})\mathrm{i}^2 + (13+4\mathrm{i})\mathrm{i} - 13\mathrm{i} = -\mathrm{i} + 4 + \mathrm{i} + 13\mathrm{i} - 4 - 13\mathrm{i} = 0$

**2.** $\mathrm{P}(z) = (z-\mathrm{i})(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - a\mathrm{i})z^2 + (c - \mathrm{i}b)z - \mathrm{i}c$. On obtient $a = 1$, $b = -4$ et $c = 13$.

**3.** $\mathrm{P}(z) = 0 \Longleftrightarrow (z-\mathrm{i})(z^2 - 4z + 13) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z - \mathrm{i} = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 - 4z + 13 = 0 \end{cases}$

Résolvons l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6\mathrm{i})^2$, donc l'équation admet deux solutions conjuguées, $2+3\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$ et finalement

$$\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \{\mathrm{i}, 2+3\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i}\}$$

### Partie B

**1.** On obtient $(z_{\mathrm{A}'} - z_{\mathrm{B}}) = (z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, c'est-à-dire après calculs

$$z_{\mathrm{A}'} = 2 + (3 - 2\sqrt{2})\mathrm{i}$$

**2.** Comme A′, B et C ont la même abscisse 2, ils appartiennent tous les trois à la droite d'équation $x = 2$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et donc sont alignés.

De $z_{\overrightarrow{BA'}} = -2\sqrt{2}i$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = -6i$, donc $\overrightarrow{BA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{BC}$, on déduit que le rapport de l'homothétie vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc que son écriture complexe est

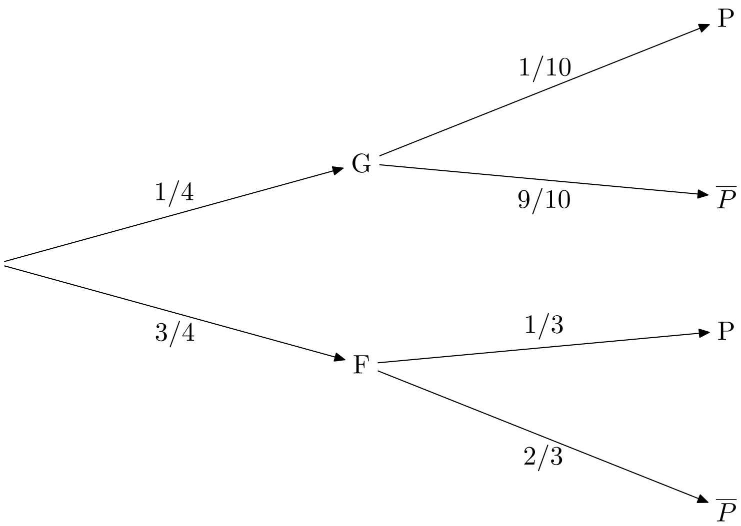
$$z' - (2+3i) = \frac{\sqrt{3}}{2}\big(z - (2+3i)\big)$$

Encore un exercice sans aucun intérêt...

## Exercice 4

**1.** Soit X la variable aléatoire associée au nombre de produits vendus. X suit la loi $\mathscr{B}(5\,;0,2)$.
Donc $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^3 = 0,2048$. **Réponse d**

**2.** Dessinons un arbre




$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}_G(P) + \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(P) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = 0,275$ **Réponse b**

**3.** $\mathbb{P}_P(G) = \dfrac{\mathbb{P}(P \cap G)}{\mathbb{P}(P)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{0,275} = \simeq 0,091$ **Réponse b**

**4.** $\mathbb{P} = \dfrac{\pi \times 30^2 - \pi \times 20^2}{\pi \times 30^2} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ **Réponse a**

## Exercice 5

### Partie A

**1.** $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{x(x+2) + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$

**2.** N est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. $N'(x) = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x}$. Or $x > -1$, donc $N'(x) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$.
$N(0) = 0$ est donc le minimum de N sur $]0\,;+\infty[$. N est donc positive sur $]0\,;+\infty[$ et négative sur $]-1\,;0[$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $\mathrm{N}(x)$ | $?$ | $0$ | $?$ |

Or $f'(x) = \dfrac{\mathrm{N}(x)}{(1+x)^2}$. Nous en déduisons que $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\,;0]$ et donc que $f$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-1\,;0]$.

**3.** Résolvons l'équation (E) : $f(x) = x$.

(E) $\iff x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x$

(E) $\iff \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

(E) $\iff \ln(1+x) = 0$

(E) $\iff x = 0$

Donc le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ est O.

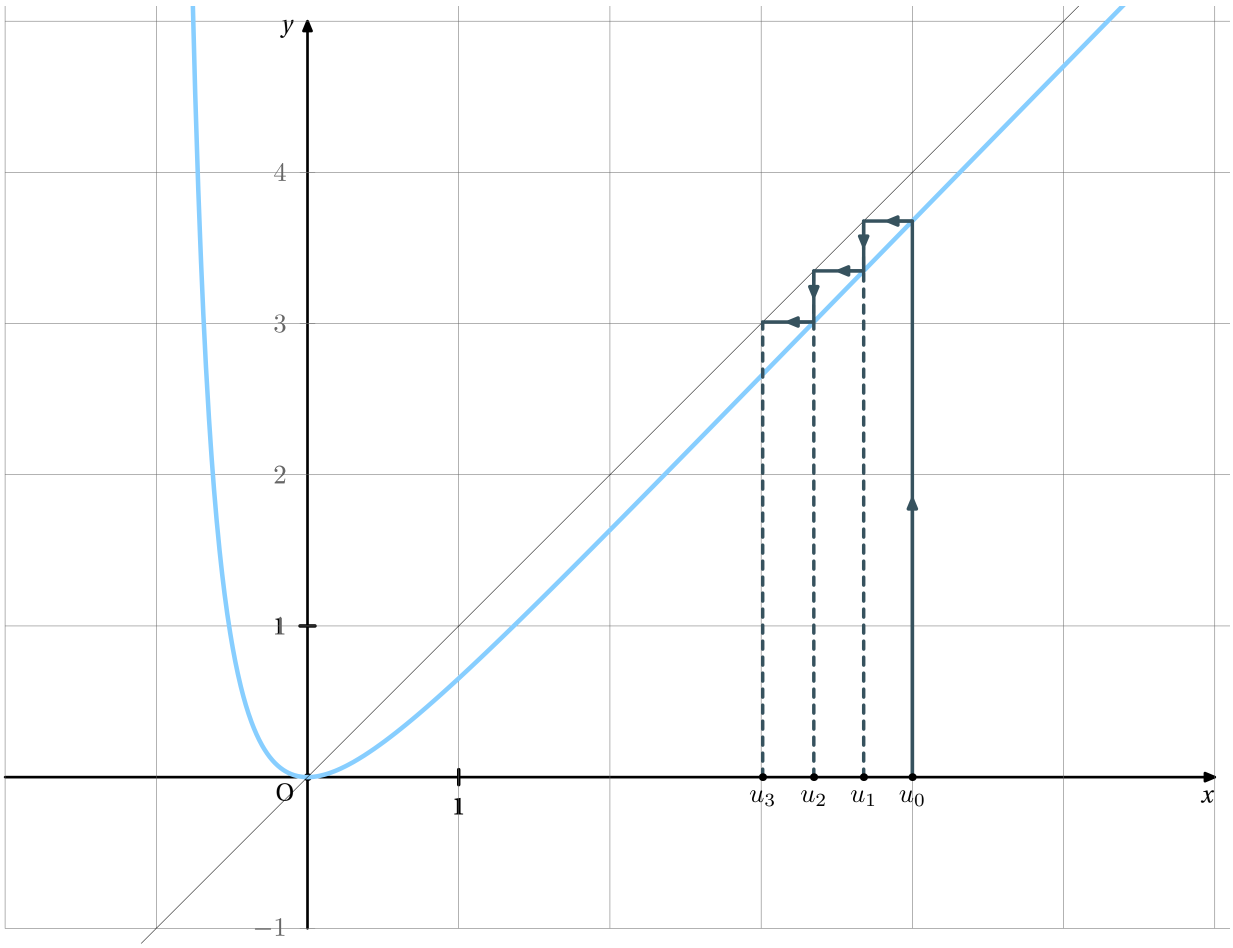
## Partie B

**1.** Comme $f$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$, elle conserve l'ordre.

Ainsi, si $x \in [0\,;4]$, alors $f(0) = 0 \leqslant f(x) \leqslant f(4) = 4 - \dfrac{\ln(5)}{5} \leqslant 4$.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations de $f(x)$ | $?$ | $0$ | $4 - \ln(5)/5$ | $?$ |

a) On obtient



b) Sachant que $u_0 = 4 \in [0;4]$, et que si $u_n \in [0;4]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;4]$ d'aprés B-1, nous en déduisons par une récurrence immédiate que pour tout entier $n$, $u_n \in [0;4]$.

c) $u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$ car $f$ est croissante sur $[0; 4]$. On en déduit par une récurrence immédiate que la suite $(u_n)$ est elle-même décroissante.

d) La suite $(u_n)$ étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell$.

e) La fonction $f$ étant continue sur l'intervalle fermé $[0;4]$ et à valeurs dans cet intervalle, et la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ étant convergente, la limite $\ell$ de $f$ est un point fixe de $f$.
D'après A-3, on en déduit que $\ell = 0$ puisque 0 est le seul point fixe de $f$.