Problèmes plus ou moins affines - 2nde 6 & 9

Exercice 1

En janvier 2000, M. Chaprot a créé une entreprise qui fabrique des épilateurs de poils de nez à condensateurs mégathermicosensorielhyropropulsés fonctionnant à l'énergie éolienne. Comme il a du mal a trouver des employés assez qualifiés pour une telle besogne, il ne peut pas fabriquer plus de 35 épilateurs par mois.

On sait que l'entreprise parvient à vendre toute sa production en Syldavie, quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués, car M. Chaprot est le cousin par alliance du beau-frère de la femme de chambre de la nouvelle maîtresse italienne du Guide Suprême de ce bucolique pays et bénéficie d'un contrat exclusif de vente obligatoire aux ministres syldaves.

Lectures graphiques

Sur le graphique, on a représenté :

– le coût total de production (charges, salaires, matériel, pots de vin, etc.) en centaines d'euros, en fonction du nombre d'épilateurs produits (courbe $\mathcal{C}$) ;

– la recette totale, en centaines d'euros, engendrée par la vente de ces x épilateurs (droite $\mathcal{R}$ passant par O.)

Par exemple, 450 sur l'axe des ordonnées se lit 45 000 euros.

1. a) Est-ce que la recette est proportionnelle au nombre d'épilateurs vendus ?

   b) Quel est le montant des coûts fixes ?

2. a) Donnez le coût total de production de 10 épilateurs et faites apparaître le tracé sur le graphique.

   b) Déduisez-en le coût unitaire de production pour une production de 10 épilateurs.

c) Quel est le coût unitaire si l'on fabrique 15 épilateurs.

3. a) Donnez, en justifiant votre réponse, le bénéfice réalisé par l'entreprise suite à la production et à la vente de 10 épilateurs.

   b) L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices quelque soit le nombre d'épilateurs fabriqués ?

Étude de la fonction bénéfice

Les courbes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ représentent en fait les fonctions r et c définies sur $[0\,;\,35]$ par :

$$r(x) = 35x \quad \text{et} \quad c(x) = x^2 + 5x + 125$$

1. Calculez $B(x)$ en fonction du nombre x d'épilateurs vendus, avec B la fonction bénéfice.
2. a) Montrez que $B(x) = -(x-5)(x-25)$.

   b) Dressez un tableau donnant le signe de B sur $[0\,;\,35]$.

   c) Combien d'épilateurs M. Chaprot doit-il produire (ou plutôt ses ouvriers) pour gagner de l'argent ?
3. a) Montrez que $B(x) = -(x-15)^2 + 100$.

   b) Quelle doit être la production pour obtenir un bénéfice maximum ?

   c) Y a-t-il un lien entre le coût unitaire et le bénéfice ?

Bénéfice futur

1. L'entreprise a réalisé un bénéfice de 10 000 euros en 2000. À la fin de l'année, après impôts, investissements forcés dans l'économie syldave, financement du mariage secret du Guide Suprême syldave, fonds versés à la caisse noire du Parti du Rassemblement Syldave, paiement des vacances de la famille Chaprot aux Maldives, il reste à l'entreprise un bénéfice net représentant 8% du bénéfice brut initial. Calculez ce bénéfice net.
2. En payant moins les ouvriers et en faisant chanter les ministres pour qu'ils achètent plus cher les épilateurs, M. Chaprot augmente ses bénéfices nets de 11% par an. Quel bénéfice peut-il envisager en 2010 ?
3. À partir de quelle année pourra-t-il obtenir un bénéfice net supérieur à 30 000 euros ?

Exercice 2 Nucléaire

En 1990, une centrale atomique a été créée. Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du pourcentage des salariés ayant quatre oreilles par rapport au total des salariés de la centrale.
Le tableau suivant donne, pour les années indiquées, le nombre x d'années écoulées depuis 1990 et le pourcentage y de salariés à quatre oreilles correspondant.

Année	1992	1994	1995	1998	1999	2001	2002	2003
x	2	4	5	8	9	11	12	13
y (en %)	8,9	10,2	10,5	12,2	12,3	13,2	13,8	14,9

1. Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, représenter le nuage des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$.
2. a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage, c'est à dire le point de coordonnées (moyenne des abscisses,moyenne des ordonnées)

   b) Placer le point G sur le graphique précédent.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point G et de coefficient directeur 0,5.

   a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.

   b) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.

4. On réalise, à l'aide de la droite $\mathcal{D}$ un ajustement affine du nuage représenté à la question **1.**, c'est à dire qu'on suppose que l'évolution du pourcentage de salarié à quatre oreilles peut être modélisé par la fonction affine correspondant à la droite $\mathcal{D}$. À l'aide de cet ajustement, déterminer graphiquement :

   a) le pourcentage de salariés à quatre oreilles dans l'entreprise en 2000 ;

   b) en quelle année le pourcentage des salariés à quatre oreilles dans l'entreprise atteindra 16 %.

   Pour ces deux questions, les traits nécessaires à la lecture devront figurer sur le graphique.

5. Retrouver par le calcul les résultats de la question précédente à l'aide de l'équation de $\mathcal{D}$ obtenue à la question **3. b.**.

Exercice 3 Brochets

Données scientifiques concernant le brochet
La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau ci-dessous :

âge du brochet en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années.
Très nombreux à la naissance, les brochets se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1000 brochets qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.
Le graphique suivant représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ?
2. On désigne par G_1 le point moyen du trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers

   a) Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

   b) Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite : $y = 9,8x + 14,4$.

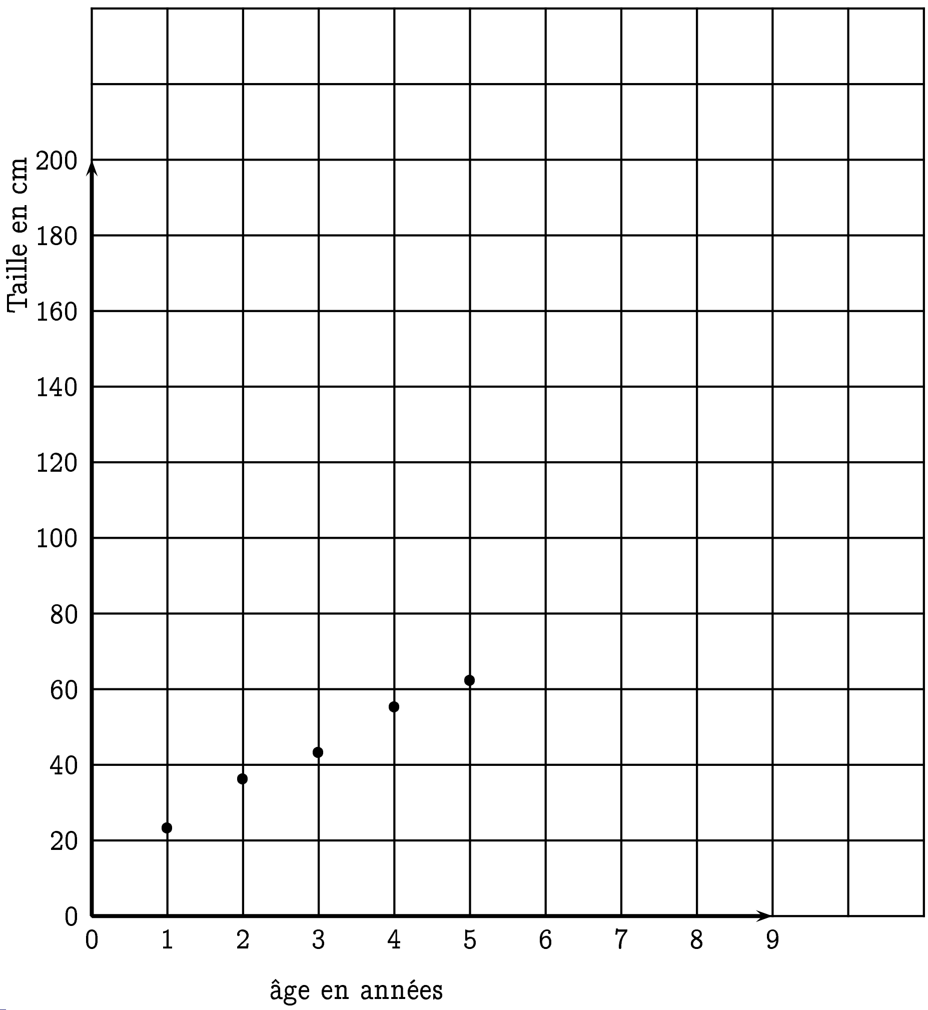
   c) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2).
   Placer le point G sur le graphique.

3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du brochet en fonction de son âge.

   a) Résoudre algébriquement l'inéquation $9,8x + 14,4 > 200$. Est-il vraisemblable qu'un brochet dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ?

   b) Résoudre graphiquement l'équation $9,8x + 14,4 = 100$.
   En déduire l'âge d'un brochet mesurant 100 centimètres . (On donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction).

Évolution de la taille d'un brochet en fonction de son âge



Exercice 4 Microbes

On met en contact des bactéries avec un agent antimicrobien.
Dans le tableau ci-dessous,
t_i désigne le temps (en minutes) d'exposition des bactéries à l'agent antimicrobien,
y_i désigne le nombre de survivants sur 10^6 bactéries.

t_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	120	67	49	27	20	9	7	3
$z_i = \ln y_i$								

Vous trouverez une touche ln sur votre calculatrice.

1. Recopier le tableau en complétant la dernière ligne $z = \ln y_i$, où ln désigne la fonction logarithme népérien : vous vous contenterez d'utiliser la touche ln de votre calculatrice.
   Donner les résultats arrondis à 10^{-1} près.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(t_i ; z_i)$ dans un repère orthogonal (*unités graphiques 2 cm pour 10 minutes en abscisse et 2 cm pour une unité en ordonnée*).
3. a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen G_2 associé aux quatre derniers points du tableau.
   b) Tracer la droite (G_1G_2).
   c) Une équation de la droite (G_1G_2) est de la forme $z = at + b$. Calculer les nombres réels a et b.