Terminales S – corrigé du devoir en classe n° 8

EXERCICE 1

$B(2\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,2\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,2)$, $F(2\,;\,0\,;\,2)$ et $G(2\,;\,2\,;\,2)$

1. *Représentation paramétrique de la droite* (DF)

   La droite (DF) passe par $D(0\,;\,2\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ de coordonnées $(1\,;\,-1\,;\,1)$.

   Une représentation paramétrique de la droite (DF) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. a. *Existence d'un plan unique passant par les points* B, E, G

   On vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires, ainsi les points B, E et G ne sont pas alignés, il existe donc un plan unique passant par les points B, E et G.

   b. *Vecteur normal au plan* (BEG)

   On vérifie que le vecteur $\vec{n}$, de coordonnées $(1\,;\,-1\,;\,1)$, est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$, en utilisant le produit scalaire. Ces deux vecteurs formant un couple de vecteurs directeurs du plan (BEG), le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BEG).

   c. *Équation cartésienne du plan* (BEG)

   Le vecteur $\vec{n}$, de coordonnées $(1\,;\,-1\,;\,1)$, étant un vecteur normal au plan (BEG), une équation cartésienne du plan (BEG) est $x - y + z + h = 0$, avec $h \in \mathbb{R}$.
   Or le plan (BEG) passe par $B(2\,;\,0\,;\,0)$ donc $2 - 0 + 0 + h = 0$, ainsi $h = -2$.
   Finalement, une équation cartésienne du plan (BEG) est $x - y + z - 2 = 0$.

3. *Orthogonalité entre la droite* (DF) *et le plan* (BEG)

   - On vérifie facilement que $\overrightarrow{DF} = -2\vec{n}$, ainsi le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est aussi un vecteur normal du plan (BEG) donc $(DF) \perp (BEG)$.
   - Le point $K\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ est le point de paramètre $t = \frac{4}{3}$ de la droite (DF) donc $K \in (DF)$.
   - $x_K - y_K + z_k - 2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2 = 0$ donc $K \in (BEG)$.

   Ainsi, la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BEG) en K.

4. a. *Nature du triangle* BEG

   On vérifie que $BE = BG = EG = 2\sqrt{2}$ unités de longueur, donc le triangle BEG est équilatéral.

   b. *Aire du triangle* BEG

   Pour un triangle équilatéral, l'aire est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, où a est la longueur d'un côté.

   On a donc, $\text{aire}(BEG) = \frac{(2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$ unités d'aire.

   c. *Volume du tétraèdre* BDEG

   La droite (DF) et le plan (BEG) sont perpendiculaires en K, donc la hauteur correspondant à la face BEG du tétraèdre BDEG est KD.

   On vérifie que $KD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ unités de longueur, donc :

   $$\text{volume}(BDEG) = \frac{1}{3} \times KD \times \text{aire}(BEG) = \frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{8}{3} \text{ unités de volume.}$$

5. a. *Appartenance du point* B *au plan* P *d'équation* $x+y-2=0$

   On a $x_B + y_B - 2 = 2 + 0 - 2 = 0$ donc $B \in P$.

   b. *Position relative des plans* P *et* (BEG)

   Un vecteur normal à P est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (BEG) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, les plans P et (BEG) ne sont pas parallèles, donc les plans P et (BEG) sont sécants.

   c. *Représentation paramétrique et vecteur directeur de la droite* d, *intersection des plans* P *et* (BEG)

   Un système d'équations cartésiennes de la droite d est $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x+y-2=0. \end{cases}$

   En posant $y = k$ et en résolvant, on obtient une représentation paramétrique de la doite d :

$$\begin{cases} x = 2-k \\ y = k \\ z = 2k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

   Un vecteur directeur de la droite d est donc $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

$\boxed{P(z) = z^3 - 4\sqrt{2}\,z^2 - 20z - 24\sqrt{2} \text{ avec } z \in \mathbb{Z}}$

1. a. *Factorisation de* $P(z)$

   Pour tout $z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\left(z-6\sqrt{2}\right)\left(z^2+2\sqrt{2}\,z+4\right) &= z^3 - 6\sqrt{2}\,z^2 + 2\sqrt{2}\,z^2 - 24z + 4z - 24\sqrt{2} \\ &= z^3 - 4\sqrt{2}\,z^2 - 20z - 24\sqrt{2} \\ &= P(z)\end{aligned}$$

   b. *Résolution de l'équation* $P(z) = 0$ *dans* $\mathbb{C}$

   $P(z) = 0$ si, et seulement si $z = 6\sqrt{2}$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

   L'équation $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -8 < 0$, ainsi elle possède deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

   L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \left\{6\sqrt{2}\,;\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,;\ -\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right\}$.

   c. *Module de* z_1

   $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2.$

   Remarque : on peut montrer que $z_1 = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

2. $\boxed{z_A = 6\sqrt{2},\ z_B = z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ et } z_C = z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

   b. *Calculs de* OB, OC *et* BC

   $OB = |z_B| = |z_1| = 2.$

   $OC = |z_C| = |z_2| = |z_1| = 2$ car z_1 et z_2 sont conjugués.

   $BC = |z_B - z_C| = \left|-\sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right| = \left|-2i\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}.$

   (Les valeurs sont données en unité de longueur.)

c. *Nature du triangle* OBC

- On a $OB = OC$ donc le triangle OBC est un triangle isocèle de sommet principal O.
- $BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ et $OB^2 + OC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $OB^2 + OC^2 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OBC est rectangle en O.

Ainsi, le triangle OBC est un triangle rectangle isocèle en O.

Remarque

On a $\dfrac{z_C}{z_B} = \text{i}$ donc $\left|\dfrac{OC}{OB}\right| = |\text{i}| = 1$, ainsi $OB = OC$ et, $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OC}\right) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Le triangle OBC est bien un triangle rectangle isocèle en O.

3. a. *Nature de l'ensemble* E *des points* M *dont l'affixe z vérifie* $\left|z - 6\sqrt{2}\right| = 10$

Comme $z_A = 6\sqrt{2}$ on a, $M \in E$ si, et seulement si $\left|z - z_A\right| = 10$ donc, si, et seulement si $AM = 10$.

E est le cercle de centre A et de rayon 10 unités de longueur.

b. *Appartenance de* B *et* C *au cercle* E

$$\left|z_B - 6\sqrt{2}\right| = \left|-\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right| = \left|-7\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(-7\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{98 + 2} = 10,$$

donc $B \in E$.

On démontre de même que $C \in E$ (on peut aussi utiliser la symétrie de la figure par rapport à l'axe des abscisses).

4. a. *Affixe* z_D *du point* D *tel que* OBCD *soit un parallélogramme*

OCD est un parallélogramme si, et seulement si $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$, donc si, et seulement si $z_D = z_C - z_B = -2\text{i}\sqrt{2}$.

b. *Appartenance du point* D *à l'ensemble* E

$$\left|z_D - 6\sqrt{2}\right| = \left|-2\text{i}\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right| = \left|-6\sqrt{2} - 2\text{i}\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(-6\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{72 + 8},$$

donc $\left|z_D - 6\sqrt{2}\right| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \neq 10$, ainsi $D \notin E$.

Terminales S : corrigé du devoir en classe n° 8

Figure de l'exercice 2 - Echelle en cm: 1:2 (x), 1:2 (y)