Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 1

EXERCICE 1

Preuve par récurrence, que pour tout entier naturel n, $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$

Initialisation

Comme $5^{0+2} = 25$ et $4^{0+2} + 3^{0+2} = 25$, la propriété « $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$ » est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité

On suppose que, pour tout entier naturel n, $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$.
En multiliant par 5 cette inégalité on obtient $5^{n+3} \geqslant 5 \times 4^{n+2} + 5 \times 3^{n+2}$.
Or $5 \geqslant 4$ et $5 \geqslant 3$ d'où $5 \times 4^{n+2} \geqslant 4^{n+3}$ et $5 \times 3^{n+2} \geqslant 3^{n+3}$ d'où $5 \times 4^{n+2} + 5 \times 3^{n+2} \geqslant 4^{n+3} + 3^{n+3}$ en additionnant ces deux inégalités.
Finalement, $5^{n+3} \geqslant 4^{n+3} + 3^{n+3}$ par transitivité. Ainsi la propriété « $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$ » est héréditaire, donc, pour tout entier naturel n, $5^{n+2} \geqslant 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

EXERCICE 2

$\boxed{u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \text{ et } u_0 = 4}$

1. *Pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$ (récurrence)*
   - $u_0 = 4$ et $0^2 = 0$ ainsi $u_0 > 0^2$, la propriété « $u_n > n^2$ » est vérifiée pour $n = 0$.
   - On suppose que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
     On a donc $u_n + 2n + 5 > n^2 + 2n + 5 > n^2 + 2n + 1$ soit $u_{n+1} > (n+1)^2$.
     La propriété « $u_n > n^2$ » est récurrente, donc, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
2. *Expression de u_n en fonction de n (conjecture et récurrence)*

   On a $u_1 = 9$, $u_2 = 16$, $u_3 = 25$, on peut ainsi conjecturer que $u_n = (n+2)^2$.
   - Comme $u_0 = 4$ et $(0+2)^2 = 4$ on a $u_0 = (0+2)^2$ donc la propriété « $u_n = (n+2)^2$ » est vérifiée pour $n = 0$.
   - On suppose que, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+2)^2$.
     D'où, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5 = (n+2)^2 + 2n + 5 = n^2 + 4n + 4 + 2n + 5 = n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$.
     La propriété « $u_n = (n+2)^2$ » est récurrente, donc, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+2)^2$.

EXERCICE 3

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} b_0 = 12 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{array}\right.}$$

Partie A

1. *Calculs de a_1, b_1, a_2 et b_2*
   $a_1 = 4$, $b_1 = 9$, $a_2 = \dfrac{17}{3}$ et $b_2 = \dfrac{31}{4}$.
2. a. *Résultats de l'algorithme pour $n = 2$*

n	i	a	b
2	1	4	10
	2	6	9

b. *Modification de l'algorithme*

On introduit une nouvelle variable c initialisée à 0.

Pour le traitement, on peut écrire ceci :

Traitement	On saisit n
	Tant que $i < n$
	    Début du « Tant que »
	        i prend la valeur $i + 1$
	        c prend la valeur a
	        a prend la valeur $(2 * a + b)/3$
	        b prend la valeur $(c + 3 * b)/4$
	    Fin du « Tant que »

c. *Objet de l'algorithme*

L'algorithme (modifié) calcul les valeurs de a_n et b_n.

Partie B

1. a. *Preuve que la suite (u_n) définie par $u_n = b_n - a_n$ est géométrique*

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12}$$
$$u_{n+1} = \frac{5b_n - 5a_n}{12} = \frac{5}{12}(b_n - a_n) = \frac{5}{12}u_n.$$

Ainsi (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - b_0 = 12$.

b. *Expression de u_n en fonction de n*

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$.

c. *Limite de (u_n)*

Comme $0 < \frac{5}{12} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. *Preuve que la suite (v_n) définie par $v_n = 3a_n + 4b_n$ est constante*

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3 \times \frac{2a_n + b_n}{3} + 4 \times \frac{a_n + 3b_n}{4} = 2a_n + b_n + a_n + 3b_n$$
$$v_{n+1} = 3a_n + 4b_n = v_n.$$

La suite (v_n) est donc constante et, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 = 3a_0 + 4b_0 = 48$.

3. *Calculs de a_n et de b_n en fonction de u_n et v_n*

On résout le système $\begin{cases} b_n - a_n = u_n \\ 3a_n + 4b_n = v_n \end{cases}$ en considérant que a_n et b_n sont les inconnues et on obtient $a_n = \frac{v_n - 4u_n}{7}$ et $b_n = \frac{3u_n + v_n}{7}$.

4. *Expressions de a_n et b_n en fonction de n*

En utilisant les résultats des questions 1 b, 2 et 3, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{48}{7}\left[1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right] \text{ et } b_n = \frac{1}{7}\left[48 + 36\left(\frac{5}{12}\right)^n\right].$$

5. *Convergence des suites (a_n) et (b_n)*

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{48}{7}$.