Lois de probabilité continues
Loi uniforme

Terminale S
Lycée Charles Poncet

Novembre 2013

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Loi à densité sur un intervalle

1.1 Exemple d'introduction

Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de 2 heures d'ouverture, de 7 heures 30 à 9 heures 30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
On admet que la probabilité que ce camion arrive dans l'intervalle de temps $[t_1\ ;\ t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre la représentation graphique de $x \longmapsto f(x) = |x - 8{,}5|$ définie sur $[7{,}5\ ;\ 9{,}5]$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t_1$ et $x = t_2$ (en unités d'aire, le plan étant muni d'un repère orthogonal).

a. Représenter f sur l'intervalle $[7{,}5\ ;\ 9{,}5]$.

b. Calculer la probabilité que ce camion arrive entre 8 heures et 9 heures.

c. Calculer la probabilité que ce camion arrive entre 9 heures et 9 heures 30.

d. Vérifier que $\displaystyle\int_{7{,}5}^{9{,}5} f(x)\,dx = 1$.

☛ On dit que $x \longmapsto f(x) = |x - 8{,}5|$ définie sur $[7{,}5\ ;\ 9{,}5]$ est une *densité de probabilité*.

1.2 Définitions

On considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité.

Définition 1.2.1
Une variable aléatoire continue X *est une fonction qui à chaque éventualité de* Ω *associe un nombre réel d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *(*X *pouvant prendre toutes les valeurs réelles de* I*).*

Définition 1.2.2
Soit $I = [a\ ;\ b]$ *avec* $a < b$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$*.*

Une fonction f*, continue, positive sur* I *telle que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$ *est une* densité de probabilité.

Définition 1.2.3
Dire que P est le loi de probabilité de densité f de X *signifie que pour tout intervalle* $J = [c\ ;\ d]$ *inclus dans* I *(donc* $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$*), la probabilité* $P(X \in J)$ *est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe représentative de* f *entre les droites d'équations* $x = c$ *et* $x = d$ *(en unités d'aire). On a donc :*

$$\boxed{P(X \in J) = \int_c^d f(x)\,dx.}$$

☛ Notations : on a $P(X \in J) = P(c \leqslant X \leqslant d) = P(J)$.

Propriétés

a. Pour tout réel $c \in I$, $P(X = c) = \displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$.
On a donc $P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c < X \leqslant d) = P(c < X < d) = P(c \leqslant X < d)$.

b. Les propriétés des probabilités d'évènements rencontrées dans le cas discret s'étendent au cas continu, par exemple :
- si $J \subset I$ alors $P\left(\overline{J}\right) = 1 - P(J)$;
- si $I' \subset I$ avec $P(I') \neq 0$ et si $J \subset I$ alors $P_{I'}(J) = \dfrac{P(I' \cap J)}{P(I')}$.

Exemple

a. Montrer que $x \longmapsto f(x) = 3x^2$ est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 1]$.

b. X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour densité f.
Calculer $P(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$.

1.3 Espérance mathématique

Définition 1.3.1
Soit $I = [a\ ;\ b]$ *avec* $a < b$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$.
Si X *est une variable aléatoire continue dont la loi de probabilité a pour densité la fonction* f *sur* I *alors l'*espérance mathématique *de* X *est le nombre :*

$$\boxed{E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.}$$

✏ À l'aide de votre calculatrice, calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire de l'exemple d'introduction (paragrahe 1.1) et, celle de la variable aléatoire de l'exemple du paragraphe 1.2.

2 Loi uniforme

2.1 Définition

Définition 2.1.1
Soit $I = [a\ ;\ b]$ *avec* $a < b$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$.
La variable aléatoire X *suit la* loi uniforme *sur* I *lorsque la densité est une fonction constante sur* I.

Théorème 2.1.1
La loi uniforme sur $I = [a\ ;\ b]$ *avec* $a < b$ *a pour densité la fonction* f *définie pour tout réel* t *de* $[a\ ;\ b]$ *par :*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{b-a}.}$$

✏ Démontrer le théorème 2.1.1. Pour cela, pour tout réel t de $I = [a\ ;\ b]$ on a $f(t) = k$, k étant une constante. Déterminer k en écrivant que f est une densité de probabilité sur $I = [a\ ;\ b]$.

2.2 Propriétés

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $I = [a\ ;\ b]$ (avec $a < b$).

- Si $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ alors $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.
- L'espérance mathématique de X est $E(x) = \dfrac{a+b}{2}$.

✏ Démontrer les deux propriétés.