L'ensemble des nombres complexes

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Mars 2013

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Introduction

1.1 Rappels sur les ensembles de nombres

a. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des (nombres) entiers naturels. Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x + 3 = 0$ (par exemple) n'a pas de solution. La solution -3 appartient à $\mathbb{Z}$.

b. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des (nombres) entiers relatifs. Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x + 2 = 0$ (par exemple) n'a pas de solution. La solution $-\dfrac{2}{3}$ appartient à $\mathbb{Q}$.

c. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 5$ (par exemple) n'a pas de solution. Les solutions $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

d. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. Dans $\mathbb{R}$ toutes les équations du second degré avec $\Delta < 0$ n'ont pas de solution.

   Par exemple l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.

   On va introduire un ensemble de « nouveaux » nombres appelés *nombres complexes*, dans lequel l'équation $x^2 = -1$ aura des solutions.

   Mais la découverte des nombres complexes ne s'est pas faite avec la résolution de l'équation du second degré, mais avec celle de l'équation du troisième degré.

☛ On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Introduction historique

Au XVI^e siècle (pendant la Renaissance Italienne) l'équation du troisième degré est résolue algébriquement.

On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^3 - 15x - 4$.

a. En étudiant les variations de la fonction P, justifier que l'équation $P(x) = 0$ possède trois solutions dans $\mathbb{R}$.

b. En utilisant la calculatrice, déterminer des approximations décimales des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

c. En utilisant l'une des solutions, factoriser P sous forme d'un produit d'un binôme du premier degré et d'un trinôme du second degré.

   Déterminer alors les valeurs exactes des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

On utilise maintenant la méthode des mathématiciens italiens [1] pour résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Préliminaire

Théorème 1.2.1
Pour tout nombre réel m, il existe un seul nombre réel α tel que $\alpha^3 = m$.

✏ Démontrer le théorème 1.2.1 en étudiant les variations de la fonction $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

☛ Lorsque $m \geqslant 0$, α est la *racine cubique* de m et on pose $\alpha = \sqrt[3]{m}$ et lorsque $m \leqslant 0$ on a $\alpha = -\sqrt[3]{-m}$, par exemple $\sqrt[3]{125} = 5$.

1. Hieronimus CARDANO (Pavie 1501 – Rome 1576), Scipione del FERRO (Bologne, 6 février 1465 – Bolonne, novembre 1526) et Nicolo TARTAGLIA (Brescia, vers 1500 – Venise, 13 décembre 1557).

Résolution de $P(x) = 0$

On admet le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 (formules de CARDAN)
p et q sont deux nombres réels.
Une solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ est $u + v$ où u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation :

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

a. En utilisant le théorème 1.2.2, écrire l'équation du second degré qui permet de résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b. Calculer le discriminant Δ, de cette équation. Que constate-t-on ?

c. Pour trouver u^3 et v^3, l'idée est d'introduire un « nouveau nombre » dont le carré est égal à -1. On note ce nombre i. Toutes les règles ordinaires du calcul algébrique s'appliquent en utilisant l'égalité $i^2 = -1$. Par exemple :

$$\begin{aligned}(1+3i)(2-i) &= 2+6i-i-3i^2\\ &= 2+5i-3\times(-1)\\ &= 2+5i+3\\ &= 5+5i.\end{aligned}$$

Vérifier que l'équation du second degré obtenue précédemment s'écrit $(z-2)^2 - (11i)^2 = 0$.
En déduire les « solutions » de cette équation.

d. Calculer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$. En déduire une valeur pour u et v et finalement une des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

e. COMPLÉMENTS
Vous pouvez aussi résoudre de la même façon les équations $x^3-18x-35 = 0$ et $x^3-51x-104 = 0$.
Pour cela, il faudra calculer $(4+i)^3$ et $(4-i)^3$.

2 Forme algébrique d'un nombre complexe

2.1 Théorème d'existence

On admet le théorème suivant :

Théorème 2.1.1
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ vérifiant :

- *$\mathbb{C}$ est muni d'une* addition *et d'une* multiplication *qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calculs.*
- *Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.*
- *Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + ib = a + bi$ (avec a et b réels).*

Vocabulaire

- $\mathbb{C}$ est l'ensembles des *nombres complexes*.
- Si $z = a+ib$ (a et b réels), a est la *partie réelle* de z notée $a = \mathfrak{Re}(z)$ et b sa *partie imaginaire* notée $b = \mathfrak{Im}(z)$.

  $a + ib = a + bi$ est la *forme algébrique* de z.

  ☛ *La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.*

– Si $b = \mathfrak{Im}(z) = 0$, on dit que z est *réel* (on retrouve que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
– Si $a = \mathfrak{Re}(z) = 0$, on dit que z est *imaginaire pur*.

D'après le théorème précédent, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, ainsi :

$$\boxed{a + ib = a' + ib' \text{ si et seulement si } a = a' \text{ et } b = b'} \ (a, b, a' \text{ et } b' \text{ réels}).$$

En particulier : $a + ib = 0$ si et seulement si $a = b = 0$ (a et b réels).

2.2 Représentation graphique

Pour représenter $\mathbb{R}$, il suffit d'une droite munie d'un repère $(O\,;\,\vec{u})$ (c'est-à-dire un *axe*).

Un nombre complexe $z = x+iy$ dépend des deux nombres réels x et y, il faut donc utiliser deux axes, donc un repère du plan. Pour pouvoir utiliser la notion de longueur, ce repère sera orthonormal.

☛ Lorsque l'on utilise les nombres complexes, le plan est appelé le *plan complexe*.

Soit $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe.

$z = x + iy$ avec x et y réels est représenté par le point $M(x\,;\,y)$ ou le vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

z est *l'affixe* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{V}$, et M ou $\overrightarrow{V}$ est *l'image* du nombre complexe z (*affixe* est un nom féminin, tout comme *abscisse* ou *ordonnée*).

✏ Placer les points $A(1)$, $B(i)$, $C(-2 + i)$ et $D(-1 - i)$.

La droite (Ox) ou $(O\,;\,\vec{u})$ est *l'axe des réels*, la droite (Oy) ou $(O\,;\,\vec{v})$ est *l'axe des imaginaires purs*.

☛ Deux vecteurs sont égaux (resp. deux points sont confondus) si et seulement si, ils ont la même affixe.

3 Opérations sur les nombres complexes

3.1 Somme et produit

3.1.1 Calcul algébrique

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (a, b, a' et b' réels).

$$\boxed{\begin{aligned} z + z' &= a + a' + i(b + b') \\ zz' &= aa' - bb' + i(ab' + a'b) \\ -z &= -a - ib \\ z - z' &= a - a' + i(b - b') \end{aligned}}.$$

✏ Vérifier les formules précédentes.
Calculer $(a + ib)^2$, $(a - ib)^2$ et $(a + ib)(a - ib)$ sous forme algébrique.

☛ La troisième formule est à retenir (on peut remarquer que $(a + ib)(a - ib)$ est un nombre réel positif car a et b sont deux nombres réels) et $\boxed{(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2}$.

Définition 3.1.1
Le conjugué *du nombre complexe* $z = a+ib$ *(*a *et* b *étant deux nombres réels) est le nombre complexe* $\bar{z} = a - ib$.

✏ Déterminer les conjugués de $1 + 2i$, $5i - 3$, -7 et $i\sqrt{2}$.

☛ En utilisant la définition du conjugué, si $z = a + ib$ (avec a et b réels) on a donc $\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2}$.

3.1.2 Calculs d'affixes

Si z_1 et z_2 sont les affixes de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ alors $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ a pour affixe $Z = z_1 + z_2$.

Si z_A et z_B sont les affixes de A et B, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Si z_A et z_B sont les affixes de A et B, alors I d'affixe z_I est le milieu de [AB] si, et seulement si, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

3.2 Inverse d'un nombre complexe non nul – quotient

3.2.1 Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ (a et b réels) un nombre complexe non nul ($z \neq 0$ donc $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$, a et b ne sont pas simultanément nuls).
On cherche $Z \in \mathbb{C}$ tel que $zZ = 1$.
En remarquant que $z\overline{z} = a^2 + b^2$ est un réel non nul, calculer Z sous forme algébrique.

Théorème 3.2.1
Tout nombre complexe non nul *admet un inverse.*
Si $z = a + ib$ *avec* $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ *alors* $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i}$.

Méthode de calcul

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

✏ Vérifier que $\dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}\,i$.

3.2.2 Quotient

Si $z' \neq 0$ alors $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Méthode de calcul

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib' \neq 0$ (avec a, b, a' et b' réels) sont deux nombres complexes, alors :

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} = \frac{aa'+bb'+i(a'b-ab')}{a'^2+b'^2}.$$

✏ Vérifier que $\dfrac{1+i}{1-i} = i$.

3.3 Conclusion

$(\mathbb{C}\,;\,+\,;\,\times)$ est un *corps commutatif* (comme $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$). Mais $\mathbb{C}$ n'est pas muni (classiquement) de relation d'ordre ($<$, $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$). Cela signifie que les règles de calculs sont les mêmes. En particulier pour les égalité remarquables.

Si A et B sont deux nombres complexes, on a :

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2\\
(A-B)^2 &= A^2-2AB+B^2\\
(A+B)(A-B) &= A^2-B^2\\
(A+iB)(A-iB) &= A^2+B^2\\
(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\\
(A-B)^3 &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\\
A^3-B^3 &= (A-B)(A^2+AB+B^2)\\
A^3+B^3 &= (A+B)(A^2-AB+B^2).
\end{aligned}$$

On utilise les mêmes méthodes pour résoudre les équations du premier degré et les systèmes d'équations linéaires que dans $\mathbb{R}$.

✏ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3+i)z-4+5i=2iz+1$.

L'unique solution est le nombre $2-i$.

3.4 Propriétés de la conjugaison

Définition 3.4.1 (rappel de la définition 3.1.1)
Le conjugué *du nombre complexe* $z=a+ib$ *(*a *et* b *étant deux nombres réels) est le nombre complexe* $\overline{z}=a-ib$.

Propriétés

Justifier les propriétés suivantes :

a. Calcul de a et b en fonction de z et $\overline{z}$:

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \quad b=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Conséquences :
z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$.
z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\overline{z}$.

b. $\overline{\overline{z}}=z$.

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$, $\overline{-z}=-\overline{z}$ et $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$.

$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

Si $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ et si $z'\neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Si $n\in\mathbb{Z}$ et $z\neq 0$, $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$, en particulier $\overline{z^2}=\overline{z}^2$.

c. Interprétation géométrique de $z\longmapsto z'=\overline{z}$ et d'autres fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$:

- la transformation $M(z)\longmapsto M_1(z_1)$ avec $z_1=\overline{z}$ est la réflexion (ou symétrie orthogonale) d'axe (Ox) ;
- la transformation $M(z)\longmapsto M_2(z_2)$ avec $z_2=-z$ est la symétrie centrale de centre O ;

– la transformation $M(z) \longmapsto M_3(z_3)$ avec $z_3 = -\overline{z}$ est la réflexion (ou symétrie orthogonale) d'axe (Oy).

☛ La composée de deux des transformations précédentes (dans n'importe quel ordre) donne la troisième transformation.

4 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels

Cette résolution sera faite en activité.

Théorème 4.0.1
Soit $T(z) = az^2 + bz + c$ *avec* a, b, c *réels et* $a \neq 0$. *On pose* $\Delta = b^2 - 4ac$ *(*discriminant *du trinôme* T *ou de l'équation* $T(x) = 0$*).*
Le trinôme T *ou l'équation* $T(x) = 0$ *possède dans* $\mathbb{C}$ *deux racines :*

$$z' = \frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z'' = \frac{-b+\delta}{2a}$$

δ *étant un nombre complexe tel que* $\Delta = \delta^2$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $T(z) = a(z - z')(z - z'')$.

☛ On a aussi $S = z' + z'' = -\dfrac{b}{a}$ et $P = z'z'' = \dfrac{c}{a}$.

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$, les deux racines sont réelles (éventuellement confondues) :

$$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Lorsque $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, les deux racines sont complexes conjuguées (non réelles) :

$$z' = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

5 Module d'un nombre complexe

Pour cette section, le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

5.1 Définitions

Définition 5.1.1
Soit M *d'affixe* z *(avec* $z \in \mathbb{C}$*). Le* module *de* z *est la longueur* OM. *On note* $\boxed{|z| = OM}$.

Définition 5.1.2
Soit $z = x + iy$ *un nombre complexe (avec* x *et* y *réels). Le* module *de* z *est le nombre* $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

☛ Les deux définitions sont équivalentes puisque $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On peut aussi définir la module de z par $|z| = \left\|\overrightarrow{V}\right\|$ avec $\overrightarrow{V}$ d'affixe z.

5.2 Quelques propriétés du module

a. $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ donc $\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}$.

b. Si z est réel, $z = x$ donc $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$: le module prolonge la notion de valeur absolue à $\mathbb{C}$.
Si z est imaginaire pur, $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$ donc $|z| = \sqrt{y^2} = |y|$.

c. $|\overline{z}| = |z|$.

d. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

e. z_A et z_B étant les affixes de deux points A et B alors $\boxed{AB = |z_B - z_A|}$.

Exercice d'application

a. R étant un nombre réel strictement positif, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z| = R$.
b. R étant un nombre réel strictement positif et Ω étant le point d'affixe ω, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z - \omega| = R$.
c. A étant le point d'affixe a et B celui d'affixe b, avec $a \neq b$, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z - a| = |z - b|$.

5.3 Inégalité triangulaire

Théorème 5.3.1 (inégalité triangulaire)
Quels que soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $z' = kz$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.

Preuve du théorème 5.3.1

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, les points $M(z)$ et $M'(z')$. On construit le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Dans le triangle OMS on a $OS \leqslant OM + MS$, or :

- $\overrightarrow{OS}$ a pour affixe $z + z'$ donc $OS = |z + z'|$;
- $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z donc $OM = |z|$;
- $OMSM'$ est un parallélogramme (par construction de S) donc $MS = OM'$ et comme $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe z', $MS = OM' = |z'|$.

D'où $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

L'égalité a lieu si et seulement si $OS = OM + MS$, c'est-à-dire $M \in [OS]$ donc $\overrightarrow{OS} = \alpha\overrightarrow{OM}$ avec $\alpha \geqslant 1$. On a $z + z' = \alpha z$ donc $z' = (\alpha - 1)z$. On pose $k = \alpha - 1$ d'où $z' = kz$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, si $z' = kz$ avec $k \in \mathbb{R}_+$, on a :

- $|z + z'| = |z + kz| = |(1 + k)z| = |1 + k| \times |z| = (1 + k)|z|$ car $1 + k \geqslant 0$;
- $|z| + |z'| = |z| + |kz| = |z| + |k| \times |z| = (1 + |k|)|z| = (1 + k)|z|$ car $k \geqslant 0$.

Finalement : $|z + z'| = |z| + |z'|$. C. Q. F. D.

6 Argument d'un nombre complexe non nul

Pour les sections suivantes, le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Rappels

Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle orienté $\left(\vec{U} ; \vec{V}\right)$ possède une infinité de mesures.

Si θ est l'une de ces mesures, les autres sont les nombres $\theta + 2k\pi$ où k est un entier relatif. On note $\left(\vec{U} ; \vec{V}\right) = \theta \pmod{2\pi}$.

La *mesure principale* (ou *détermination principale* d'un angle orienté est la mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

6.1 Définition

Définition 6.1.1
On appelle argument *du nombre complexe non nul* z *l'une des mesures* θ *de l'angle orienté* $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}\right)$, M *étant l'image de* z *dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct* $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On note $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ *ou* $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ *(avec* $k \in \mathbb{Z}$*).*

☛ L'angle orienté $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}\right)$ est aussi appelé l'argument de z.

✏ Déterminer un argument des nombres 1, i, -1 et $-i$ puis de $1 + i$.

☛ Le nombre 0 n'a pas d'argument.

6.2 Quelques propriétés des arguments

Proposition 6.2.1
Soit z *un nombre complexe non nul.*

- z *est réel si et seulement si* $\arg(z) = 0 \pmod{\pi}$ *;*
- z *est imaginaire pur si et seulement si* $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

✏ Démontrer la proposition 6.2.1.

Proposition 6.2.2
Si A *et* B *sont deux points d'affixes respectives distinctes* a *et* b *alors :*

$$\boxed{\left(\vec{u} ; \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a) \pmod{2\pi}}.$$

✏ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq a$ tels que $\arg(z - a) = \theta \pmod{2\pi}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

7 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

7.1 Définition

Si M a pour affixe $z \in \mathbb{C}^*$ alors des *coordonnées polaires* de M sont $(\rho ; \theta)$ avec $\rho = OM = |z|$ et $\theta = \arg(z) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}\right) \pmod{2\pi}$.

Les coordonnées cartésiennes de M sont alors $x = \rho\cos(\theta) = |z|\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta) = |z|\sin(\theta)$.

On a donc $z = |z|\cos(\theta) + i \times |z|\sin(\theta)$ soit $\boxed{z = |z|\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]}$.

Définition 7.1.1
Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = |z|\big[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big]$ avec $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$. Cette écriture est la forme trigonométrique *du nombre complexe non nul z.*

Réciproquement, si $z = \rho\big[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big]$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

☛ Un nombre complexe non nul z de module $\rho > 0$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ peut se noter (provisoirement) $z = [\rho\ ;\ \theta]$.

✏ Déterminer les formes trigonométriques des nombres 1, i, -1, $-i$ et $1 + i$.

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z = x + iy \neq 0$ avec x et y réels.
On a $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arg(z)$ est défini par $\cos(\theta) = \dfrac{\Re e(z)}{|z|} = \dfrac{x}{\rho}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\Im m(z)}{|z|} = \dfrac{y}{\rho}$.

✏ Mettre $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Soit $z = [\rho\ ;\ \theta] = \rho\big[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big]$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
En développant, on a $z = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$, donc, $z = x + iy$ avec $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$.

✏ Mettre le nombre complexe de module 2 et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$ sous forme algébrique.

Remarque importante

Proposition 7.1.1
Soit $z = r\big[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big]$ avec $r \neq 0$. On a alors :

- *si $r > 0$, $z = [r\ ;\ \alpha]$, c'est-à-dire $|z| = r$ et $\arg(z) = \alpha \pmod{2\pi}$;*
- *si $r < 0$, $z = [-r\ ;\ \alpha + \pi]$, c'est-à-dire $|z| = -r$ et $\arg(z) = \alpha + \pi \pmod{2\pi}$.*

✏ Démontrer la proposition 7.1.1.

✏ Déterminer le module et un argument de $z = \sin\dfrac{2\pi}{3} + i\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

7.2 Formulaire

Théorème 7.2.1
Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et des arguments égaux à 2π près.

7.2.1 Opposé et conjugué

Théorème 7.2.2
Quel que soit le nombre complexe z non nul :

- *$|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$;*
- *$|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.*

✏ Démontrer le théorème 7.2.2.

7.2.2 Produit, inverse, quotient et puissance

Théorème 7.2.3
Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, quel que soit l'entier relatif n :

a. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *et* $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$ *;*

b. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ *et* $\arg\dfrac{1}{z} = -\arg(z) \pmod{2\pi}$ *;*

c. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg\dfrac{z}{z'} = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$ *;*

d. $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) = n\arg(z) \pmod{2\pi}$.

✏ En écrivant z et z' sous forme trigonométrique, démontrer le théorème 7.2.3.

☛ On a en particulier $|z^2| = |z|^2 = z \times \overline{z}$.

7.2.3 Conséquence géométrique

Théorème 7.2.4
Si A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c et d alors :

$$\boxed{\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{CD}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\frac{d-c}{b-a} = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) \pmod{2\pi}}.$$

✏ Démontrer le théorème 7.2.4.

✏ Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -1 + i$, $b = 2 - 2i$ et $c = 2 + 4i$.
En calculant $\dfrac{c-a}{b-a}$, déterminer la nature du triangle ABC.

8 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

8.1 Définition

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$f(\theta)$ est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ, ainsi, quels que soient les nombres réels θ et θ', $f(\theta + \theta')$ est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\theta + \theta'$.

D'après les propriétés du module et le théorème 7.2.3, $f(\theta) \times f(\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta + \theta'$ (à 2π près), donc, quels que soient les nombres réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.

Comme $f(0) = 1$ et par analogie avec le cas réel (les fonctions g qui vérifient $g(x + y) = g(x) \times g(y)$ quels que soient les réels x et y), on pose $f(\theta) = \exp(i\theta) = e^{i\theta}$, donc, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

Un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ est donc noté $e^{i\theta}$, donc un nombre complexe de module $\rho > 0$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ est noté $\rho\, e^{i\theta}$.

Définition 8.1.1
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ de module $\rho > 0$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$, la notation $\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}}$ *est la* notation exponentielle *du nombre complexe $z \neq 0$. On a donc :*

$$\boxed{z = \rho\, e^{i\theta} = \rho\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]}.$$

✏ Écrire i et -1 avec la notation exponentielle. On obtient la formule $\boxed{e^{\mathrm{i}\pi} = -1}$ (formule d'EULER[2]).

✏ Écrire $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ avec la notation exponentielle.

8.2 Formulaire

En utilisant les résultats du paragraphe 7.2 on obtient :

Théorème 8.2.1
Quels que soient les nombres réels θ et θ' et quel que soit l'entier relatif n :

$$e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta'} \text{ si et seulement si } \theta = \theta' \pmod{2\pi}.$$

$$\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} \qquad -e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta+\pi)} \qquad e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{n\mathrm{i}\theta}.$$

8.3 Formule de MOIVRE[3]

En utilisant l'égalité $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$, la dernière formule du théorème 8.2.1 peut s'écrire sous la forme :

Théorème 8.3.1 (formule de MOIVRE)
Quels que soient le nombre réel θ et l'entier relatif n on a :

$$\left[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right]^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

✏ Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

8.4 Formules d'EULER

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $z = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) = e^{\mathrm{i}x}$ et $\overline{z} = \cos(x) - \mathrm{i}\sin(x) = e^{-\mathrm{i}x}$. Par addition et soustraction membre à membre, on obtient :

Théorème 8.4.1 (formules d'EULER)
Pour tout nombre réel x on a :

$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

☛ Ces deux formules servent à linéariser les expressions du type $\cos^p(x) \times \sin^q(x)$ où p et q sont deux entiers naturels.

✏ En utilisant les formules d'EULER, linéariser $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$.

2. Leonhard EULER, mathématicien, physicien et ingénieur suisse (Bâle 1707 – Saint-Pétersbourg 1783). Un des plus gands mathématiciens de tous les temps. C'est l'un des créateurs de l'analyse. Il a œuvré dans toutes les branches des mathématiques de son époque. On lui doit la notation e pour le nombre de NÉPER et il a favorisé l'adoption de la lettre π pour le nombre d'ARCHIMÈDE

3. Abraham de MOIVRE, mathématicien anglais d'origine française (Vitry-le-François 1667 – Londres 1754)