Deux exercices sur les séries de FOURIER

1 BTS, groupement A, juin 2009

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développements en série de FOURIER *de fonctions périodiques rencontrées en électricité.*

1. On considère un entier n strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que $\displaystyle\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t \text{ sur } [0\,;\,1[\\ f(t) = 0 \text{ sur } [1\,;\,2[. \end{cases}$$

   a. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ sur le document réponse de la page 4.

   b. On appelle S_f la série de FOURIER associée à la fonction f. On note :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)\right].$$

   Calculer a_0.
   Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n, et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

   c. Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 \left[f(t)\right]^2 dt$.

   d. Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

   e. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{\mu_{\text{eff}}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est tracée sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ dans le document réponse de la page 4.
   On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par $S_g(t) = S_f(-t)$.
   Justifier que $S_g(t) = \dfrac{1}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$.

4. Soit h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2, telles que $h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre réel t.

a. Sur le document réponse de la page 4, tracer les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

b. On admet que les développements en série de FOURIER S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par $S_h(t) = S_f(t) + S_g(t)$ et $S_k(t) = S_f(t) - S_g(t)$.

Déterminer les coefficients de FOURIER associés respectivement aux fonctions h et k.

2 BTS, groupement A, juin 2010

Dans cet exercice, on se propose d'étudier dans la partie A une perturbation d'un signal continu et, dans la partie B, la correction de cette perturbation par un filtre analogique.

Partie A

Dans cet exercice, on note τ une constante réelle appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et on considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, telles que :

- pour tout nombre réel t, $f(t) = 1$;
- la fonction g est périodique de période 2π et :

$$\begin{cases} g(t) = 0 \text{ si } 0 \leqslant t < \tau \\ g(t) = 1 \text{ si } \tau \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

Pour tout nombre réel t, on pose $h(t) = f(t) - g(t)$.
La fonction h ainsi définie représente la perturbation du signal.

1. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sur le document réponse n° 1 (figures 1 et 2) de la page 5.

   Sur la figure 3 du document réponse n° 1 de la page 5, tracer la représentation graphique de la fonction h.

2. On admet que la fonction h est périodique de période 2π.

   Pour tout nombre réel t, on définit la série de FOURIER $S(t)$ associée à la fonction h par :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right].$$

   a. Déterminer a_0.

   b. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.

   Calculer $\displaystyle\int_0^{\tau} \cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $a_n = \dfrac{1}{n\pi}\sin(n\tau)$.

   c. Montrer que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, $b_n = \dfrac{1}{n\pi}\big(1 - \cos(n\tau)\big)$.

3. Soit n un nombre entier naturel. On associe à n le nombre réel A_n tel que :

   - $A_0 = a_0$;
   - $A_n = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$ si n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

   Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $A_n = \dfrac{1}{n\pi}\sqrt{1 - \cos(n\tau)}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Compléter le tableau 1 du document réponse n° 2 de la page 6 avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

5. La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que $h_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left[h(t)\right]^2 \text{d}t$.

   a. Calculer h_{eff}^2.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel P défini par $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} A_n^2$.

   c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\dfrac{P}{h_{\text{eff}}^2}$.

Partie B

On rappelle que j est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère la fonction de transfert H définie pour tout nombre complexe $p \neq -\dfrac{3}{2}$ par :

$$H(p) = \frac{3}{2p+3}.$$

On définit la fonction r, pour tout nombre réel positif ω, par $r(\omega) = \left|H(j\omega)\right|$.
Le but de cette partie est de déterminer le spectre d'amplitude du signal, noté k, obtenu en filtrant la perturbation h au moyen d'un filtre dont la fonction de transfert est H.

1. Montrer que $r(\omega) = \dfrac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}}$.
2. Pour tout nombre entier naturel n, on définit le nombre réel positif B_n par $B_n = r(n) \times A_n$, où A_n est le nombre réel positif défini dans la question 3 de la partie A.
   Compléter le tableau 2 du document réponse n° 2 de la page 6, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

   Le spectre d'amplitude du signal filtré k est donné par la suite des nombres réels B_n.

3. La figure 4 sur le document réponse n° 2 de la page 6 donne le spectre d'amplitude de la perturbation h, c'est-à-dire une représentation graphique de la suite des nombres réels A_n.

   Sur la figure 5 du document réponse n° 2 de la page 6, on a commencé de même à représenter la suite des nombres réels B_n.
   Compléter cette représentation graphique à l'aide du tableau de valeurs n° 2 du document réponse n° 2 de la page 6.
4. Une valeur approchée à 10^{-4} près du carré de la valeur efficace du signal k est $k_{\text{eff}}^2 \approx 0{,}051\,6$.

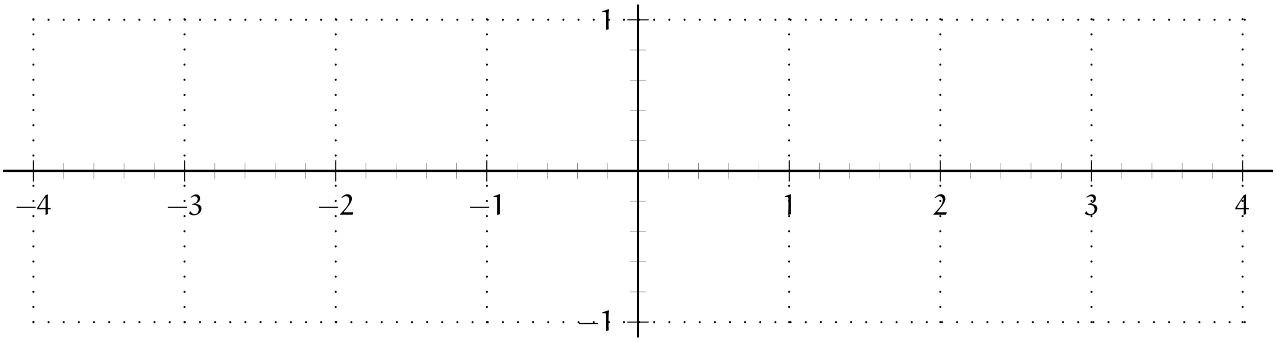
   a. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel Q défini par $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} B_n^2$.

   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près du quotient $\dfrac{Q}{k_{\text{eff}}^2}$.

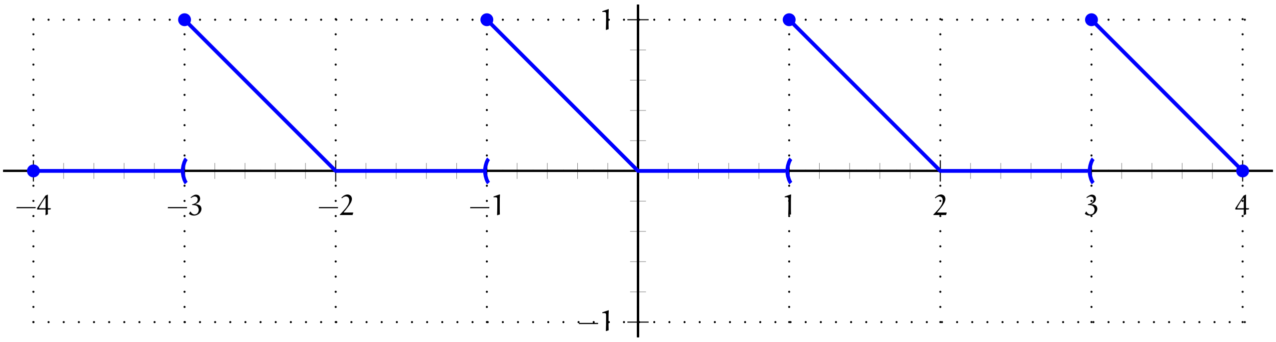
On a étudié le spectre de FOURIER *d'une perturbation d'un signal. On ne peut pas négliger les raies de hautes fréquences de ce spectre. Le filtrage dissipe une part importante de l'énergie de la perturbation et les raies de hautes fréquences de la perturbation filtrée sont négligeables.*

BTS, groupement A, juin 2009 – document réponse

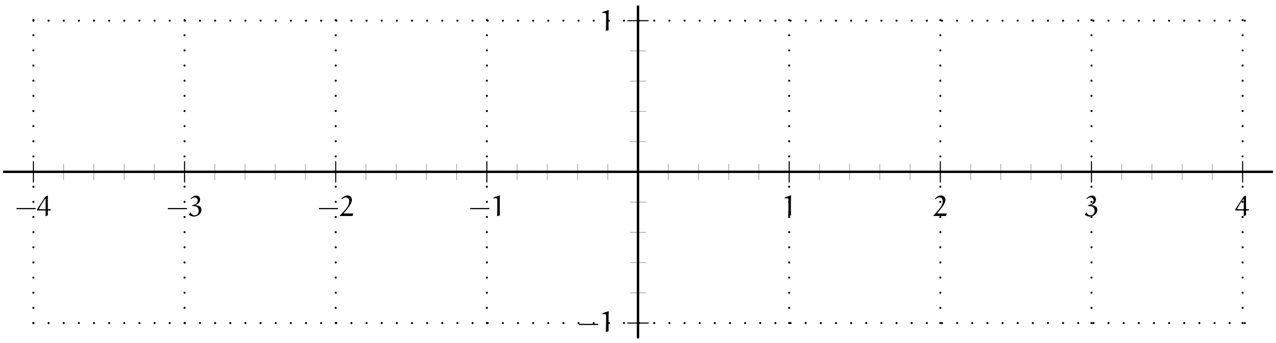
Représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f



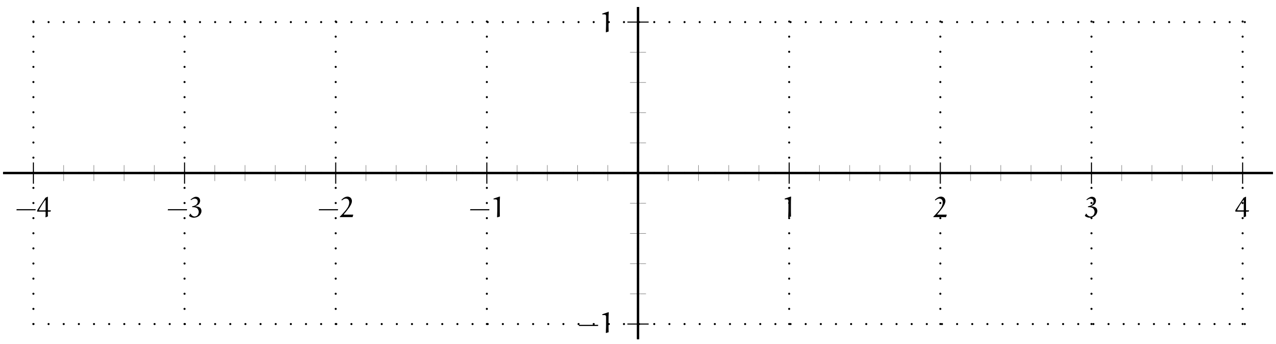
Représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g



Représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de la fonction h



Représentation graphique $\mathscr{C}_k$ de la fonction k



BTS, groupement A, juin 2010 – document réponse n° 1

Figure 1 : courbe représentative de f

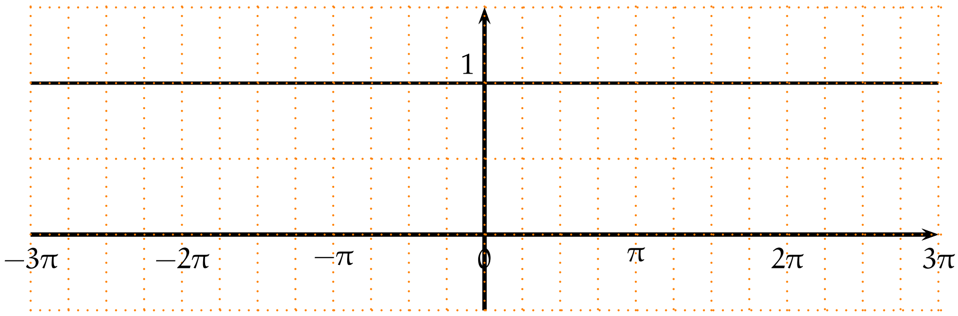


Figure 2 : courbe représentative de g

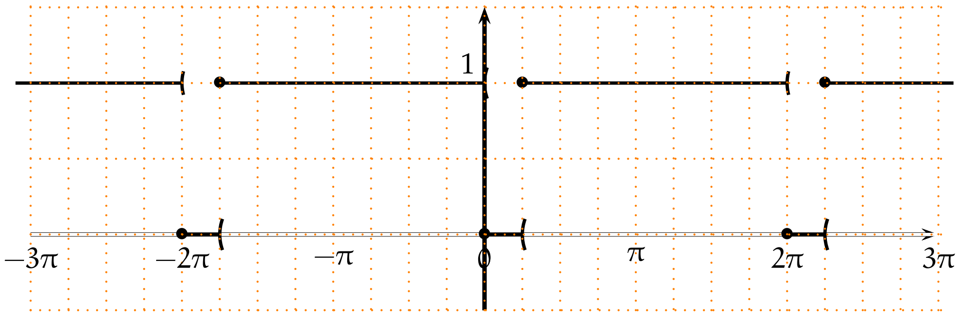
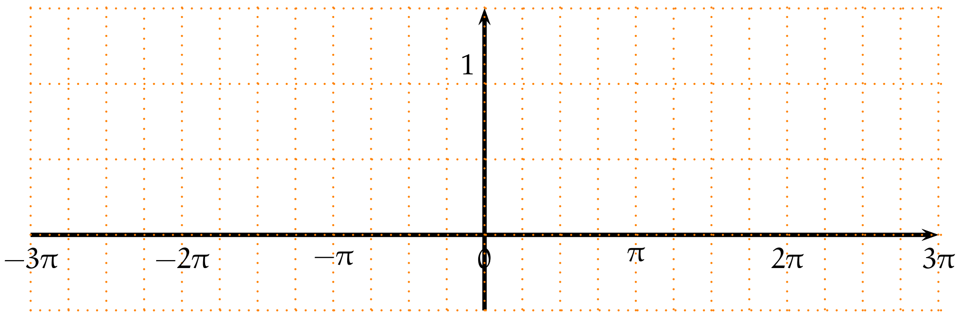


Figure 3 : courbe représentative de h



BTS, groupement A, juin 2010 – document réponse n° 2

Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,125 00	0,172 27		0,138 63		0,083 18	0,053 05	0,024 61
n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n		0,019 14	0,031 83	0,037 81		0,031 99	0,022 74	0,011 48

Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n		0,143 34		0,062 00	0,039 52	0,023 90	0,012 87	0,005 16
n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,000 00	0,003 15	0,004 72	0,005 11		0,003 67	0,002 42	0,001 14

Figure 4

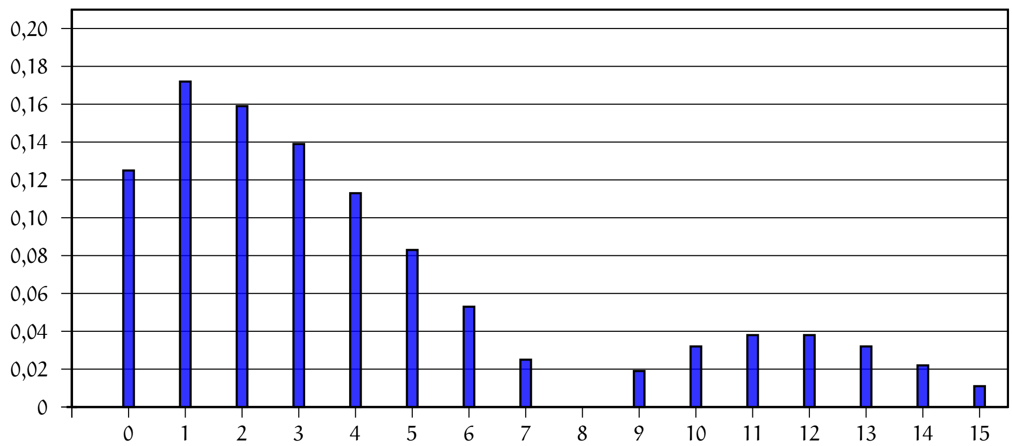


Figure 5