EXERCICE 2 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
On notera U la fonction échelon unité définie pour tout nombre réel t par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0[$. On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions causales notées respectivement e et s. Ce système est du second ordre, c'est à dire que les fonctions e et s sont liées sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par une équation différentielle du type

$$s''(t) + b\,s'(t) + c\,s(t) = c\,e(t),$$

où b et c désignent des constantes réelles.
On suppose de plus dans tout l'exercice que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

Partie A : résolution d'une équation différentielle du second ordre

Dans cette partie, on suppose que $b = 1$ et $c = 0{,}25$. De plus, le signal d'entrée, constant, est défini pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $e(t) = 10$.

La fonction causale s est donc solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \; : \; y'' + y' + 0{,}25y = 2{,}5.$$

1. Déterminer une fonction constante sur $[0; +\infty[$ solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' + 0{,}25y = 0$.
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle est celle de $s(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$? Recopier la réponse choisie sur la copie.

   - $5t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$
   - $10 - (5t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$
   - $10 - (2{,}5t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}25t}$
   - $10 - (10t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$

Partie B : utilisation de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on suppose que $b = 0$ et $c = 9$. De plus, le signal d'entrée, sinusoïdal, est défini pour tout nombre réel t par

$$e(t) = \sin(2t)U(t).$$

La fonction causale s est donc solution de l'équation différentielle

$$(E') : \; s''(t) + 9s(t) = 9\sin(2t)U(t).$$

On note S la transformée de Laplace de la fonction s.

1. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E'), montrer que
$$S(p) = \frac{18}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

2. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel p, on ait
$$S(p) = \frac{a}{p^2+4} + \frac{b}{p^2+9}.$$

3. En déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

Partie C : détermination de l'amplitude du signal de sortie

On note f la fonction causale définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(t) = (1{,}8\sin(2t) - 1{,}2\sin(3t))\,U(t).$$

Cette fonction est périodique de période 2π sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Sur l'annexe 2 sont tracées deux représentations graphiques de la fonction f.
Les points M_1, M_2, M_3, M_4 indiqués sur le graphique correspondent aux extremums locaux de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
Le but de cette partie est de déterminer la valeur maximale A atteinte par $f(t)$ quand t varie dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. En utilisant la figure 1 de l'annexe 2, déterminer une valeur approchée de A à 0,1 près.

2. Pour tout nombre réel t positif ou nul, calculer une expression de $f'(t)$.

3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t, $f'(t)$ peut se mettre sous la forme

$$f'(t) = \alpha \sin\left(\frac{5t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

où α est un nombre réel strictement positif.

En déduire la valeur de $f'\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ pour tout nombre entier naturel k.

(b) Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points M_1, M_2, M_3, M_4.

En déduire une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

Annexe 2

Figure 1