Exercice 1

• Pgcd

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. *Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.*

Si d est un diviseur commun de n et $2n+1$, alors d divise
$2n+1-2n=1$.
Les seuls diviseurs communs de n et $2n-1$ sont donc -1 et 1.

$\boxed{n \text{ et } 2n+1 \text{ sont premiers entre eux.}}$

2. *On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.*

a. *Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.*

On a :

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta &= 2n+6-2n-1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Si : $\delta = \text{pgcd}(\alpha\ ;\ \beta)$, alors δ divise α et β et donc δ divise $2\alpha-\beta$.

Finalement, δ divise 5 : $\boxed{\delta \in \{1\ ;\ 5\}.}$

b. *Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.*

▶ Si α et β sont multiples de 5, alors 5 divise α et β. Par suite 5 divise $\alpha - \beta = n-2$.

▶ Si $(n-2)$ est multiple de 5 alors, il existe k enter naturel tel que : $n-2=5k \Longleftrightarrow n=5k+2$.

Or : $$\begin{aligned} \alpha &= n+3 = 5k+2+3 \\ &= 5(k+1). \end{aligned}$$

5 divise α.

Et : $$\begin{aligned} \beta &= 2n+1 = 10k+4+1 \\ &= 5(2k+1). \end{aligned}$$

5 divise β.

$\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont multiples de 5 si et seulement si } (n-2) \text{ est multiple de 5.}}$

3. *On considère les nombres a et b définis par : $a = n^3+2n^2-3n$ et $b = 2n^2-n-1$. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.* On a :

$$\begin{aligned} a &= n^3+2n^2-3n \\ &= n\left(n^2+2n-3\right) \\ &= n(n-1)(n+3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2n^2-n-1 \\ &= (n-1)(2n+1). \end{aligned}$$

Puisque n est un entier supérieur ou égal à 2, $n(n-3)$ et $2n+1$ sont des entiers relatifs et donc :

$\boxed{a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels divisibles par } (n-1).}$

4. a. *On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.*

On a donc $d = \text{PGCD}(n(n+3); 2n+1)$
et $\delta = \text{PGCD}(n+3; 2n+1)$

▶ δ est le pgcd de $2n+1$ et de $n+3$. Il divise $n+3$ et donc $n(n+3)$.

Finalement δ divise $2n+1$ et $n(n+3)$ donc d.

▶ d divise $n(n+3)$ et $2n+1$.

Si d et n n'était pas premiers entre eux, ils admettraient un diviseur premier commun qui ainsi diviserait n et $2n+1$, ce qui est absurde puisque n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

On a donc d et n premiers entre eux et d divisant $n(n+3)$, et, d'après le théorème de Gauss, d divise $n+3$.

d divise $n+3$ et $2n+1$, il divise donc leur PGCD δ.

▶ δ divise d et d divise δ donc

$\boxed{d = \delta}$

b. *En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.*

On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{PGCD}\left(n(n-1)(n+3); (n-1)(2n+1)\right) \\ &= (n-1)\text{PGCD}\left(n(n+3); (2n+1)\right) \\ &= (n-1)d \\ &= (n-1)\delta \end{aligned}$$

Or $\delta = 1$ ou $\delta = 5$

et $\delta = 5$ si et seulement si $n-2$ est un multiple de 5.

$\boxed{\text{Ainsi si } n-2 \text{ n'est pas un multiple de 5 , } \Delta = n-1 \text{ et si } n-2 \text{ est un multiple de 5, } \Delta = 5(n-1)}$

c. *Application :*

▶ Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;

$2001-2$ n'est pas un multiple de 5 et ainsi

$\boxed{\Delta = n-1 = 2000}$

▶ *Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.*

$2002-2$ est un multiple de 5 et ainsi

$\boxed{\Delta = 5(n-1) = 5 \times 2001 = 10005}$