Similitudes | 4

1. Transformations, généralités (Rappels !)

1 - 1. Transformations

Définition 1.1 : Une **transformation du plan** est une bijection du plan sur lui-même.

Théorème 1.1 :

transformations	**transformation réciproque**
translation de vecteur $\overrightarrow{u}$	translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$
homothétie de centre O et de rapport non nul k	homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$
réflexion d'axe Δ	réflexion d'axe Δ
rotation de centre O et d'angle α	rotation de centre O et d'angle -α

1 - 2. Ecriture complexe d'une transformation

Théorème 1.2 :

transformation	**écriture complexe**
translation de vecteur $\overrightarrow{u}$	$z' = z + a$ où a est l'affixe de $\overrightarrow{u}$
homothétie de centre Ω et de rapport non nul k	z'-ω=k(z-ω) où ω est l'affixe de Ω
rotation de centre Ω et d'angle α	z'-ω=$e^{i\alpha}$(z-ω) où ω est l'affixe de Ω

Théorème 1.3 : La transformation plane dont l'écriture complexe est de la forme :

- $z' = z + b$ est une translation.
- $z' = kz + b$ (k réel non nul et différent de 1) est une homothétie de rapport k.
- $z' = e^{i\alpha}z + b$ (α différent de 0,modulo 2π) est une rotation d'angle α.

1 - 3. Généralités sur les compositions de transformations

Définition 1.2 : Soit f et g deux transformations du plan.
L'application qui à tout point M du plan associe le point $g(f(M))$ est une transformation appelée **composée** de f par g et notée gof. Ainsi $gof(M) = g(f(M))$

Propriétés 1.1 :

- $fo(goh) = (fog)oh$
- $s^{-1} = s$ si s est une symétrie orthogonale ou centrale
- $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$
  d'où les résultats suivants :
- $fog = id_P \quad \Leftrightarrow g = f^{-1} \Leftrightarrow f = g^{-1}$ où id_P est l'application identique du plan.
- si s est une symétrie orthogonale ou centrale alors :$f = sog \Leftrightarrow g = sof$
- si $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$, $f = t_{\vec{u}}og \Leftrightarrow g = t_{-\vec{u}}of$.

Propriété $_{1.2}$: L'écriture complexe de la composée de deux transformations s'obtient en composant dans le même ordre leurs écritures complexes.

2. Similitudes , généralités

2 - 1. Définition et exemples

Définition $_{2.1}$: Soit k un réel strictement positif .
On appelle **similitude de rapport** k toute transformation du plan qui multiplie les distances par k.

Exemples $_1$ *: Soit les transformations du plan f et g d'écritures complexes respectivement $z' = 2\mathrm{i}z - 3$ et $z' = -2\overline{z} + \mathrm{i}$.*
Démontrer que f et g sont des similitudes.

Définition $_{2.2}$: Une **isométrie** est une similitude de rapport 1.

Propriétés $_{2.1}$: Soit s une similitude de rapport k et trois points A, B et C.
Soit A', B' et C' les points tels que :$A' = s(A)$, $B' = s(B)$ et $C' = s(C)$.

- $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (le produit scalaire est multiplié par k^2)
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ (les angles géométriques sont conservés)
- L'image d'un repère orthonormal (O, I, J) est un repère orthogonal (O, I', J') où $OI' = OJ' = k$ (rapport de la similitude).

2 - 2. Composition - décomposition

Propriété $_{2.2}$: La composée de deux similitudes de rapport k et k' est une similitude de rapport kk'.
La transformation réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Propriété $_{2.3}$: Toute similitude de rapport k, $(k > 0)$, est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie.

2 - 3. Similitudes planes et triangles semblables

Définition et propriété $_{2.3}$: Soit deux triangles ABC et A'B'C' ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$(les longueurs des côtés sont proportionnelles.
- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$, $\widehat{CAB} = \widehat{C'AB'}$

On dit alors que les triangles sont **semblables** .

Propriété $_{2.4}$: L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.

Exemple $_2$ *: Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, A' et C' les images respectives de A et de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$. A'' est le barycentre de (A';$\dfrac{3}{2}$) (B;-2) et C'' celui de (C';-6) et (B;8).*
Montrer que les triangles ABC et A''B''C'' sont semblables.

2 - 4. Ecriture complexe d'une similitude

Théorème $_{2.1}$: Les isométries du plan sont les transformations d'écriture complexe :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z + b$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z} + b$, θ étant un réel et b un nombre complexe.

Corollaire $_{2.1}$: Toute isométrie est la composée de translations, réflexions et rotations.

Théorème 2.2 : Les similitudes du plan sont les transformations d'écriture complexe :
$z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$, a et b étant deux nombres complexes ($a \neq 0$).
Le rapport de la similitude est alors $|a|$, le module de a.

Corollaire 2.2 : Toute similitude est la composée de translations, réflexions, rotations et homothéties.

Théorème 2.3 :

- Les similitudes transforment les droites en droites, les segments en segments et les cercles en cercles.
- Les similitudes conservent les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres et le contact.
- Elles multiplient les aires par le carré de leur rapport.

Exemple 3 : *Dans le plan complexe on considère la similitude s d'écriture complexe* $z' = (1+\mathrm{i})z - 3\mathrm{i}$.

1. *Déterminer une équation de la droite* d' *image de la droite* d : $y = 2x - 3$ *par* s.
2. *Déterminer une équation de l'image du cercle* C *de centre* O *et de rayon 3.*

Théorème et définition 2.4 : Les similitudes d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}*$ et $b \in C$) conservent les angles orientés.
Elles sont appelées **similitudes directes** et **déplacement** s'il s'agit d'une isométrie.

Théorème et définition 2.5 : Les similitudes d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$) changent les angles orientés en leur opposé.
Elles sont appelées **similitudes indirectes** et **antidéplacement** s'il s'agit d'une isométrie.

Théorème 2.6 :

- Toute similitude qui admet trois points fixes **non alignés** est l'identité.
- Toute similitude directe qui admet au moins deux points fixes est l'identité.
- Toute similitude indirecte qui admet au moins deux points fixes A et B est la réflexion d'axe (AB).

Exemple 4 : *Dans le plan orienté* $ABCD$ *est un carré direct de côté 1.* I *est le milieu de* $[AB]$ *et* J *celui de* $[DC]$.

1. *Démontrer qu'il existe une unique similitude indirecte* S *telle que* $S(A) = B$ *et* $S(C) = D$.
2. *Vérifier que* I *et* J *sont des points fixes de* S. *Quelle est la nature de* S ?

3. Similitudes directes

Théorème 3.1 : Soit s la symétrie directe d'écriture complexe :$z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

- lorsque $a = 1$, s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
- lorsque $a \neq 1$, s admet un unique point fixe Ω d'affixe ω, s est la composée dans un ordre indifférent :
  - de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, avec $k = |a|$.
  - de la rotation de centre Ω et d'angle θ avec $\theta = arg(a) + 2k\pi$. ($k \in \mathbb{Z}$)
    L'écriture complexe de s est alors : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

Théorème 3.2 : Soit s la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

- Pour tout point M d'image M' par s, on a :

  $\Omega M' = k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) lorsque $M \neq \Omega$.

- Pour tout point A et B d'image A' et B' par s, on a :

  $A'B' = kAB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) lorsque $A \neq B$.

Théorème 3.3 : Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe s transformant A en A' et B en B'.

Exemple 5 *: Soit un carré direct ABCD de centre O.*
Justifier qu'il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.
Déterminer ses éléments caractéristiques.

4. Tout ce que vous devez savoir sur les similitudes...

<u>Définition</u> : Les similitudes multiplient les distances par k. ($k \in \mathbb{R}^{+*}$)
Si $k = 1$, on obtient une isométrie.
<u>Propriétés</u> : Les similitudes :

- conservent les angles géométriques et multiplient les produits scalaires par k^2.
- conservent le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres et le contact .
- transforment les droites en droites, les segments en segments et les cercles en cercles.

		Similitudes directes	**Similitudes indirectes**
Ecritures complexes ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$)		$z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$	$z' = a\bar{z} + b$ avec $a = ke^{i\theta}$
		conservent les angles orientés	changent les angles orientés en leur opposé.
Isométries $k = \lvert a \rvert = 1$		**Déplacements**	**Antidéplacements**
	pas de point fixe	$a = 1 \longrightarrow$translation	$\longrightarrow$symétrie glissée
	Un seul point fixe $\Omega(\omega)$	rotation de centre Ω et d'angle θ	
	au moins deux points fixes A et B	alors tous les points sont fixes $\longrightarrow$ identité	alors la droite (AB) est l'ensemble des points invariants $\longrightarrow$ réflexion d'axe (AB)
Homothétie $a \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$	$\theta = 0\ [\pi]$ et $a \neq 1$	homothétie de rapport k si θ=0 [2π] de rapport -k si $\theta = \pi$ [2π]	
Les similitudes sont composées d'isométries et d'homothéties .		$M \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M'$ $z \longrightarrow e^{i\theta}z \longrightarrow ke^{i\theta}z \longrightarrow ke^{i\theta}z + b$	$M \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots$ $z \longrightarrow \bar{z} \longrightarrow \ldots$
Au moins deux points fixes A et B alors s est une isométrie et...		tous les points sont fixes $\longrightarrow$identité	$\longrightarrow$ réflexion d'axe (AB)
un seul point fixe $\Omega(\omega)$		$\bullet s = h_{\Omega,k} o r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} o h_{\Omega,k}$ $\bullet$**Ecriture complexe de s** : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ $\bullet$$\Omega$M'=$k\Omega$M et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$= θ [2π] $\bullet$A'B'=kAB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$=$\theta$ [2π] k rapport de la similitude et θ angle de la similitude	
		<u>Théorème</u>: Soit A, B, A' et B' des points du plan tels que A$\neq$B et A'$\neq$B'. Il existe une unique similitude directe s transformant A en A' et B en B'.	Une similitude indirecte peut s'écrire sous la forme *sor* où s est une similitude directe et r une réflexion.