Nombres complexes | 6

1. Extension des ensembles de nombres

Petits rappels:

$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
L'équation $x + 3 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}$?

$\mathbb{Z} = \{\ldots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
L'équation $2x + 3 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$?

$\mathbb{Q} = \left\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ -\frac{5}{7}\ ;\ldots\right\}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
L'équation $x^2 - 3 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Q}$?

$\mathbb{R} = \left\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ -\frac{13}{3}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{13}\ ;\ \pi;\ -2\pi\ ;\ldots\right\}$ est l'ensemble des nombres réels.
L'équation $x^2 + 9 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

Théorème 1.1 : $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un **corps commutatif**, c'est à dire :

$(\mathcal{P}_1)$: l'addition est commutative ;

$(\mathcal{P}_2)$: l'addition est associative ;

$(\mathcal{P}_3)$: l'addition admet un élément neutre 0 ;

$(\mathcal{P}_4)$: tout réel a admet pour l'addition un symétrique, son opposé noté $-a$;

$(\mathcal{P}_5)$: la multiplication est commutative ;

$(\mathcal{P}_6)$: la multiplication est associative ;

$(\mathcal{P}_7)$: la multiplication admet un élément neutre 1 ;

$(\mathcal{P}_8)$: tout réel a, non nul, admet pour la multiplication un symétrique, son inverse noté a^{-1} ;

$(\mathcal{P}_9)$: la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Quelles sont les propriétés vérifiées dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$?

2. Ensemble $\mathbb{C}$

On désire construire un ensemble que l'on notera $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation $x^2 = -1$ a une solution et conservant les propriétés de corps commutatif de $\mathbb{R}$.
La ou les solutions de $x^2 = -1$ ne sont pas des réels.
On note i une des solutions de cette équation, ainsi : $\mathrm{i}^2 = -1$.
$\mathbb{C}$ contient donc $\mathbb{R} \cup \{\mathrm{i}\}$.

Remarques :

- $-\mathrm{i}$ est aussi une solution de $x^2 = -1$.
- $3\mathrm{i}$ est une solution de $x^2 + 9 = 0$.
- $-2\mathrm{i}$, $3 + 2\mathrm{i}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.
- D'une manière générale, a et b étant deux réels, $a + \mathrm{i}b$ est un élément de $\mathbb{C}$.

Exemples $_1$:

1. *Calculer :*
   - $A = (2+3\mathrm{i}) + (4-\mathrm{i})$;
   - $B = (2+3\mathrm{i}) \times (4-\mathrm{i})$;
   - $C = \dfrac{3}{4-\mathrm{i}}$;
   - $D = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$.
2. *D'une manière générale, a, a', b et b' étant des réels, calculer :*
   - $A = (a+\mathrm{i}b) + \left(a'+\mathrm{i}b'\right)$;
   - $B = (a+\mathrm{i}b) \times \left(a'+\mathrm{i}b'\right)$;
   - $C = \dfrac{1}{a+\mathrm{i}b}$ $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$;
   - $D = \dfrac{a+\mathrm{i}b}{a'+\mathrm{i}b'}$.
3. *Résoudre les équations :*
   - $4x^2+9=0$;
   - $x^2+2x+5=0$;
   - $x^2-4x+25=0$.

3. Forme algébrique

Théorème $_{3.1}$: Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, contenant $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i tel que : $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** : $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels **(forme algébrique de z)**.

Définition $_{3.1}$: Soit $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels).

- a est **la partie réelle** de z, notée $\Re(z)$.
- b est **la partie imaginaire** de z, notée $\Im(z)$.
- si $b = \Im(z) = 0$, z est réel (on retrouve $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- si $a = \Re(z) = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Exemple $_2$: *Soit* $z = 3 - 4\mathrm{i}$ *et* $z' = 2 + \mathrm{i}$, *calculer :*
- $z + z'$;
- $z - z'$;
- zz' ;
- z^2 ;
- $\dfrac{1}{z}$;
- $\dfrac{z}{z'}$.

Conséquences immédiates : soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ (avec a, a', b et b' réels) alors,

- $z + z' = \left(a + a'\right) + \mathrm{i}\left(b + b'\right)$ et $z \cdot z' = \left(aa' - bb'\right) + \mathrm{i}\left(ab' + a'b\right)$.
- $a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
- $a + \mathrm{i}b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Théorème et définition $_{32}$:

- L'addition et la multiplication sont commutatives :
$$\forall z, z' : z + z' = z' + z \text{ et } z \cdot z' = z' \cdot z.$$
- L'addition et la multiplication sont associatives :
$$\forall z, z' \text{ et } z'' : \left(z + z'\right) + z'' = z + \left(z' + z''\right) \text{ et } \left(z \cdot z'\right) z'' = z \cdot \left(z' \cdot z''\right).$$
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
$$\forall z, z' \text{ et } z'' : z\left(z' + z''\right) = zz' + zz''.$$
- Tout élément de $\mathbb{C}$ admet un opposé.
- Tout élément non nul de $\mathbb{C}$ admet un inverse.

On dit que $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$ est un **corps commutatif**.

Exemples $_3$ *: Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

$(\mathcal{E}_1)$ $2\mathrm{i}z = 3 + \mathrm{i}$; $(\mathcal{E}_3)$ $z^2 - (3+\mathrm{i})^2 = 0$; $(\mathcal{E}_5)$ $z^2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

$(\mathcal{E}_2)$ $\mathrm{i}z^2 + 3z = 0$; $(\mathcal{E}_4)$ $z^2 + 3 = 0$;

4. Points du plan et nombres complexes

Définition $_{4.1}$: Le plan muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est appelé **plan complexe**.

Soit le nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels), le point $\mathrm{M}\,(a\ ;\ b)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\ (a\ ;\ b)$, alors :

- M est **l'image** de z ;
- z est **l'affixe** de M et de $\overrightarrow{u}$;
- $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1}\right)$ est appelé **l'axe des réels** ;
- $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est appelé **l'axe des imaginaires purs**.

Notation : On notera z_A l'affixe de A, $z_{\overrightarrow{u}}$ l'affixe de $\overrightarrow{u}$ et $\mathrm{M}\ (z)$ le point d'affixe z.

Remarque :

$\mathrm{M}\,(z)$ et $\mathrm{M}'\,(-z)$ sont symétrique par rapport à O.

Théorème $_{4.1}$: Soit A et B deux points d'affixe z_A et z_B, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$, alors :

- $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$ c'est à dire : affixe $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)$ = affixe $\left(\overrightarrow{u}\right)$ + affixe $\left(\overrightarrow{v}\right)$;
- $z_{-\overrightarrow{u}} = -z_{\overrightarrow{u}}$ c'est à dire : affixe $\left(-\overrightarrow{u}\right)$ = −affixe $\left(\overrightarrow{u}\right)$;
- $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda\, z_{\vec{u}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ c'est à dire : affixe $(\lambda\,\vec{u}) = \lambda \times$ affixe $(\vec{u})$;
- $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$ c'est à dire : affixe $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ = affixe (B) − affixe (A) ;
- si z_I est l'affixe du milieu I de [AB], on a : $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}$.

Exemple $_4$ *: On donne trois points par leurs affixes,* $A\,(4+2i)$, $B\,(1-3i)$ *et* $C\,(-2)$.

1. *Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.*
2. *Déterminer l'affixe du centre de gravité de ABC.*

5. Conjugué

Définition $_{5.1}$: Soit $z = a + ib$ (a et b réels). On appelle **conjugué de** z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $a - ib$.

Exemples $_5$ *: Résoudre les équations suivantes :*

1. $3z - 2\overline{z} = 5 - 5\mathrm{i}$;
2. $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

Propriété $_{5.1}$: $\mathrm{M}\,(z)$ et $\mathrm{M}'\,(\overline{z})$ sont symétrique par rapport à $\left(O,\ \overrightarrow{e_1}\right)$.

Propriétés $_{5.2}$:

- z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.
- Pour tout complexe z : $\overline{(\overline{z})} = z$.

Théorème $_{5.1}$: Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel, alors :

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$;
- $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$;
- $\overline{(-z)} = -\overline{z}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ pour $z \neq 0$;
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$ pour $z' \neq 0$.

Exemples $_6$ *:*

- *Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que* $Z = \dfrac{z}{z+1}$ *soit réel.*
- *Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z tels que* $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$ *soit imaginaire pur.*

6. Forme trigonométrique

6 - 1. Coordonnées polaires (rappel)

Définition $_{6.1}$: Dans le plan muni du repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, tout point M, distinct de O, est repéré par ses **coordonnées polaires** $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\theta})$ où :

- r est la distance OM ;
- θ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Théorème $_{6.1}$: Soit un point M admettant pour coordonnées polaires $(r,\ \theta)$ et pour coordonnées cartésiennes $(a\ ;\ b)$ alors :

- $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$;
- $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$.

Exemples $_7$ *: Déterminer les coordonnées polaires des points :* $A\,(3\ ;\ 0)$, $B\,(-3\ ;\ 0)$, $C\,(-2\ ;\ 2)$ *et* $D\,(0\ ;\ -4)$.

6 - 2. Module, argument, forme trigonométrique

Définition $_{6.2}$: Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul (a et b réels) et M (z) le point d'affixe z.

- On appelle **module** de z le réel positif OM, noté $|z| = \text{OM}$ et $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On appelle **argument** de z, toute mesure θ de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{\text{OM}}\right)$, on note $\arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Si $(r,\ \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ \ [2\pi]$.

Exemples $_8$ *: Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants,*

- $z_1 = 1 + \text{i}$;
- $z_2 = -3$;
- $z_3 = -4\text{i}$;
- $z_4 = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.

Théorème et définition $_{62}$: Soit z un nombre complexe non nul.

- z s'écrit $z = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z\ \ [2\pi]$.
- Si $z = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg z\ \ [2\pi]$.
- $z = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$ est appelé **forme trigonométrique** de z, elle est notée : $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}]$.

Remarque :

Si z est nul, $|z| = 0$ et z n'a pas d'argument.
Si z_A et z_B sont les affixes des points A et B, alors $\text{AB} = \left|z_{\overrightarrow{\text{AB}}}\right| = |z_\text{B} - z_\text{A}|$.

Théorème $_{6.3}$:

- Pour tout réel, le module de x est la valeur absolue de x (d'où la notation !).
- Soit z un nombre complexe non nul :
  - z est un réel strictement positif si et seulement si $\arg z = 0\ \ [2\pi]$;
  - z est un réel strictement négatif si et seulement si $\arg z = \pi\ \ [2\pi]$;
  - z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$.

Théorème $_{6.4}$: Pour z nombre complexe non nul :

- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi\ \ [2\pi]$.
- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg z\ \ [2\pi]$.

Théorème $_{6.5}$: Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ \ [2\pi]$.

Exemple $_9$ *: Donner la forme algébrique de* $\text{Z} = \left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)(1 - \text{i})$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ *et de* $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Corollaire 6.1 : z et z' étant des nombres complexes non nuls, et n un entier relatif, on a :

Module	**Argument**	**Notation $[r,\theta]$**
$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(-z) = \arg z + \pi \ [2\pi]$	$-[r,\theta] = [r,\theta+\pi]$
$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\overline{z}) = -\arg z \ [2\pi]$	$\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$
$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ [2\pi]$	$[r,\theta]\times[r',\theta'] = [rr',\theta+\theta']$
$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) = n\arg z \ [2\pi]$	$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$
$\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \ [2\pi]$	$[r,\theta]^{-1} = \left[r^{-1},-\theta\right]$
$\left\lvert \frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \ [2\pi]$	$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

Exemple 10 *: Calculer* $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$.

Exemple 11 *: Résoudre* $z^3 = 1$.

7. Forme exponentielle

Définition 7.1 : Pour tout réel θ, on pose :

$$\cos\theta + i\sin\theta = [1,\theta] = e^{i\theta}.$$

Soit z un complexe non nul de module r et d'argument θ, on appelle **forme exponentielle** de z le nombre : $\boldsymbol{re^{i\theta}}$.

*Exemples **(importants)*** 12 *:* $e^{i\frac{\pi}{2}}$ *et* $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Remarque :

Dans la notation exponentielle d'un nombre complexe, on note généralement $|z| = \rho$ et $z = \rho e^{i\theta}$.

Propriété 7.1 : Pour tout réel θ et θ' et pour tout entier relatif n, on a :

- $e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$;
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exemple 13 *: Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :*

- $A = \dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$;
- $B = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$;
- $C = (-1+i)^{12}$.

Théorème 7.1 :

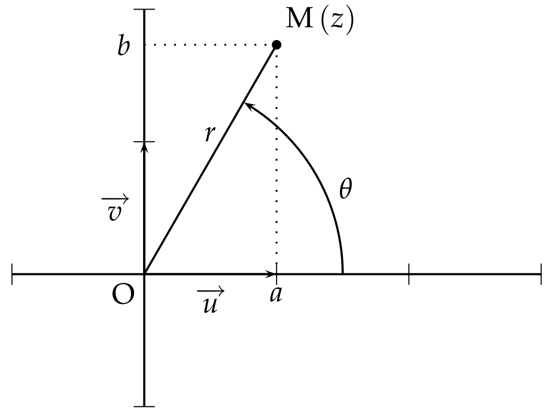
- Formule de Moivre : pour tout réel θ et tout entier n :
  - $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$;
  - $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$.
- Formule d'Euler : pour tout réel θ :
  - $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$;
  - $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Exemples 14 *:*

1. *Donner la forme algébrique de* $(1+i)^{2002}$ *et de* $(-1+i)^{2002}$.
2. *Déterminer* $\cos 3a$ *et* $\sin 3a$ *en fonction de* $\cos a$ *et* $\sin a$.

En résumé, si M est un point du plan d'affixe z tel que $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont réels, alors :

- on peut représenter le point M dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (cf. graphique ci-contre) ;
- on obtient une correspondance entre les coorodnnées cartesiennes, polaires et les différentes façons d'exprimer l'affixe de M (cf. tableaux ci-dessous).



point M (z)	coordonnées cartésiennes	coordonnées polaires	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
	$(a \,;\, b)$ a et b réels	$[r, \theta]$ $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$	$a = r\cos\theta$ $b = r\sin\theta$

affixe z_{M}	forme algébrique	forme trigonométrique	forme exponentielle
	$z_{\mathrm{M}} = a + \mathrm{i}b$	$z_{\mathrm{M}} = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ $= [r, \theta]$	$z_{\mathrm{M}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

8. Equations du second degré à coefficients réels

8 - 1. Un cas très simple

Exemples $_{15}$: *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes,*

1. $z^2 - 4 = 0$;
2. $z^2 + 4 = 0$.

Théorème $_{8.1}$: Soit a un réel non nul, l'équation $z^2 = a$ a deux racines dans $\mathbb{C}$.

- si $a > 0$, ce sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ (2 racines réelles) ;
- si $a < 0$, ce sont $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$ (2 racines imaginaires conjuguées).

8 - 2. Forme canonique

Exemples

Exemple $_{16}$ *: On veut factoriser l'expression,*

$$f(x) = x^2 - 6x - 7.$$

On a :
$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{x^2 - 2\times x \times 3 + 3^2}_{a^2-2ab+b^2} - 3^2 - 7 \\ &= (x-3)^2 - 16 \\ &= \underbrace{(x-3)^2 - 4^2}_{a^2-b^2} \\ &= (x-3-2)\,(x-3+2) \\ &= (x-5)\,(x-1)\,. \end{aligned}$$

Exemple $_{17}$ *: On veut factoriser l'expression,*

$$g(x) = x^2 + 8x + 22.$$

On a :
$$\begin{aligned} g(x) &= \underbrace{x^2 + 2\times x \times 4 + 4^2}_{a^2+2ab+b^2} - 4^2 + 22 \\ &= (x+4)^2 + 6. \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas continuer, mais dans $\mathbb{C}$ on obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+4)^2 - (-6) \\ &= \underbrace{(x+4)^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{6}\right)^2}_{a^2-b^2} \\ &= \left(x+4-\mathrm{i}\sqrt{6}\right)\left(x+4+\mathrm{i}\sqrt{6}\right). \end{aligned}$$

Cas général

On veut factoriser l'expression :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(avec a, b et c réels, a non nul) et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On a :
$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right]\right] \\ &= a\left[\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

- Premier cas, $\Delta > 0$:

  Ainsi $\Delta = \left[\sqrt{\Delta}\right]^2$, donc: $f(x) = a\left[\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2\right] = a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$

$$\boxed{\text{D'où si } \Delta > 0 \text{ alors : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

- Deuxième cas, $\Delta = 0$:

  Ainsi $f(x) = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2$

$$\boxed{\text{D'où si } \Delta = 0 \text{ alors : } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}.}$$

- Troisième cas, $\Delta < 0$:

  Si nous sommes dans $\mathbb{C}$, alors $\Delta = -[\delta]^2 = [\mathrm{i}\delta]^2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$.

  Ainsi, $f(x) = a\left[\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left[\frac{\mathrm{i}\delta}{2a}\right]^2\right] = a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\mathrm{i}\delta}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\mathrm{i}\delta}{2a}\right]$

$$\boxed{\text{D'où si } \Delta < 0 \text{ alors : } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b+\mathrm{i}\delta}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-b-\mathrm{i}\delta}{2a} \end{cases}}$$

Théorème 8.2 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ (avec a, b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions sur $\mathbb{C}$.
Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions:
  - si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
  - si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées : $x_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemples 18 *:*

1. *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$*, l'équation* $z^2-6\sqrt{3}z+36=0$.
2. *Développer* $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ *puis résoudre* $z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z+2-\sqrt{3}=0$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations :*
   - $(\mathcal{E}_1)$ $z^2-2z\cos\theta+1=0$ *;*
   - $(\mathcal{E}_2)$ $z^4-2z^2\cos\theta+1=0$.

9. Interprétations géométriques

Théorème 9.1 :

- Soit M un point d'affixe z :
  - $|z| = \mathrm{OM}$;
  - $\arg z = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ $[2\pi]$ (si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$).
- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs d'affixes respectives z et z' :
  - $|z| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$;
  - $\arg z = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}\right)$ $[2\pi]$ (si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$) ;
  - $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ $[2\pi]$ (si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$).
- Soit A, B, C, et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d.
  - $|b-a| = \mathrm{AB}$;
  - $\arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ $[2\pi]$ (si $a \neq b$) ;
  - $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ $[2\pi]$ (si $a \neq b$ et $c \neq d$).

Exemples 19 *:*

1. *Soit les points A, B et C d'affixes respectives :* i, $2+\mathrm{i}$ *et* $1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.
   Calculer $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$*. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*
2. *Soit les points A, B, C et E d'affixes respectives :* $a=2-2\mathrm{i}$, $b=-4-2\mathrm{i}$, $c=4+2\mathrm{i}$ *et* $e=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.
   Calculer $\dfrac{a-e}{b-e}$ *et* $\dfrac{c-e}{a-e}$*. Que peut-on en déduire pour* $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right)$ *?*

Corollaire 9.1 : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ non nul, des vecteurs d'affixes respectives z et z'.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z'}{z}$ est un réel.
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z'}{z}$ est un imaginaire pur.

Exemple $_{20}$ *: Soit les points A, B, C et D d'affixes respectives :* $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = 4 + 2\mathrm{i}$, $z_C = -5 - i$, $z_D = -1 + 7\mathrm{i}$.

1. *Montrer que A, B et C sont alignés.*
2. *Montrer que* (AD) *est perpendiculaire à* (AB).

Théorème $_{9.2}$: $\mathrm{M}(z)$ appartient au cercle de centre A et de rayon R si et seulement si il existe θ tel que :

$$z = z_{\mathrm{A}} + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

10. Transformations : translations et rotations

Théorème $_{10.1}$: Soit a un nombre complexe et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe a. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application :

$$\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z+a).$$

Théorème $_{10.2}$: Soit θ un nombre réel non nul et un point $\Omega(\omega)$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application : $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que :

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

démonstration : Soit la rotation r de centre Ω et d'angle θ.

- Soit un point $\mathrm{M} \neq \Omega$ et $\mathrm{M}' = r(M)$. Soit z et z' les affixes respectives de M et de M′, on a :

$$\mathrm{M}' = r_{\Omega,\theta}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega\mathrm{M} & = \Omega\mathrm{M}' \\ \text{et} & \\ \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}\right) & = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-\omega| & = |z'-\omega| \\ \text{et} & \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) & = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = [1;\alpha] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Ainsi, si $\mathrm{M} \neq \Omega$, $\mathrm{M}' = r_{\Omega,\theta}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

- si $\mathrm{M} = \Omega$, $r_{\Omega,\theta}(\Omega) = \Omega$ et on a bien $\omega - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\omega - \omega)$.
- Ainsi pour tout point M du plan, $\mathrm{M}' = r_{\Omega,\theta}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

Cas particulier : Soit θ un nombre réel non nul. La rotation de centre O et d'angle θ est l'application :

$$\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'\left(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right).$$

Théorème $_{10.3}$: Soit θ un nombre réel non nul. L'application : $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + b$ est une rotation d'angle θ.

Théorème $_{10.4}$: Soit a un nombre complexe tel que $|a| = 1$ et l'application,

$$f : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z') \text{ telle que } z' = az + b.$$

- Si $a = 1$, f est une translation.
- Si $a \neq 1$, alors $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et f est une rotation d'angle θ, dont le centre est l'unique point fixe de f.

Exemple $_{21}$ *: Soit r la rotation de centre* Ω *d'affixe* $2\mathrm{i}$ *et d'angle* $\dfrac{\pi}{2}$, *et* r' *la rotation de centre O et d'angle* $\dfrac{3\pi}{2}$.

1. *Déterminer l'écriture complexe de* $r' \circ r$.
2. *En déduire la nature de l'application* $r' \circ r$.

Exemple $_{22}$ *: Dans le plan orienté, on considère les triangles rectangles isocèles tels que*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Démontrer que $BD = CE$ *et que les droites* (BD) *et* (CE) *sont perpendiculaires :*

1. *grâce à une méthode géométrique ;*
2. *à l'aide des nombres complexes.*

11. Transformations : homothéties

On pourra se reporter au **chapitre 15 de la partie A, page 45** pour de plus amples explications sur les homothéties.

Définition $_{11.1}$: Soit un point Ω et un réel k non nul.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation h du plan qui à tout point M fait correspondre le point $\mathrm{M}' = h(\mathrm{M})$ tel que $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = k\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$.

Théorème $_{11.1}$: Soit k un nombre réel non nul et un point Ω d'affixe ω. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application : $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que : $z' - \omega = k(z - \omega)$.
Soit k un nombre réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application : $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(kz)$.

Théorème $_{11.2}$: Soit k un nombre réel non nul.
L'application : $\mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que $z' = kz + b$ est une homothétie de rapport k.

Exemple $_{23}$ *: Soit la translation t de vecteur* $\overrightarrow{V}$ *d'affixe* $-2+\mathrm{i}$, *h l'homothétie de centre* Ω *d'affixe* $-2-\mathrm{i}$ *et de rapport* -2.

1. *Déterminer l'écriture complexe de l'application* $f = h \circ t$.
2. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application* $f = h \circ t$.

12. Transformations, en résumé...

Transformations	Ecritures complexes	Exemples
Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b	$z' = z + b$	Soit A $(-1\,;\,-2)$, B $(3\,;\,2)$ et C $(0\,;\,1)$. Déterminer l'affixe du point $M = t_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\mathrm{C})$.
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$	Soit $\Omega(1\,;\,-2)$ et A $(3\,;\,1)$. Déterminer les affixes des points : • $\mathrm{A}_1 = r_{\Omega,-\frac{\pi}{2}}(\mathrm{A})$; • $\mathrm{A}_2 = r_{\Omega,\frac{\pi}{6}}(\mathrm{A})$; • $\mathrm{A}_3 = r_{\mathrm{O},\frac{3\pi}{4}}(\mathrm{A})$.
Homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$	Soit $\Omega(1\,;\,-2)$ et A $(0\,;\,-3)$. Déterminer les affixes des points : • $\mathrm{A}_1 = h_{\Omega,-2}(\mathrm{A})$; • $\mathrm{A}_2 = h_{O,3}(\mathrm{A})$.

Ecritures complexes	Transformations	Exemples
$z' = z + b$	translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b	• $z' = z + 2 - 3\mathrm{i}$.
$z' = az + b$ avec $\lvert a \rvert = 1$ donc $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	• si $a = 1$, translation ; • si $a \neq 1$, rotation d'angle θ.	• $z' = -\mathrm{i}z + 3 - 4\mathrm{i}$; • $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) z + \mathrm{i}$.
$z' = kz + b$ avec $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$	homothétie de rapport k	• $z' = -3z + 4 - \mathrm{i}$; • $z' = z\sqrt{3} - \mathrm{i}$.