Correction des exercices de convergence

Exercice 1

a $M_n(\Omega) \subset [0,1]$ donc F_{M_n} est constante égale à 0 sur $]-\infty, 0[$, et constante égale à 1 sur $]1, +\infty[$.
$\big[M_n \leqslant t\big] = \big[X_1 \leqslant t\big] \cap \cdots \cap \big[X_n \leqslant t\big]$, donc par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$,
$P\big(M_n \leqslant t\big) = P\big(X_1 \leqslant t\big) \times \cdots \times P\big(X_n \leqslant t\big)$ donc si $t \in [0,1]$, $F_{M_n}(t) = t^n$.

$$F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$Y_n(\Omega) \subset [0,n]$ donc F_{Y_n} est constante égale à 0 sur $]-\infty, 0[$, et constante égale à 1 sur $]n, +\infty[$.
$\big[Y_n \leqslant t\big] = \big[M_n \geqslant 1 - \frac{t}{n}\big]$, donc si $t \in [0,n]$, $P\big(Y_n \leqslant t\big) = 1 - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n$

$$F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n \\ 1 & \text{si } t > n \end{cases}$$

b Soit $t \geqslant 0$: pour $n \geqslant t$ on a $P\big(Y_n \leqslant t\big) = 1 - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$; or $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} -t$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(Y_n \leqslant t\big) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.
(Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 2

Chaque employé téléphone 10 minutes par heure, soit $1/10$ du temps passé au travail en moyenne. Donc la probabilité qu'à un instant donné un employé téléphone est de $1/10$. Chaque personne agit indépendamment des autres donc le nombre X de personnes qui téléphonent (ou souhaitent le faire) à un instant donné suit une loi binômiale de paramètres 300 et $1/10$.
On a donc $E(X) = 30$ et $V(X) = 27$ ou encore $\sigma(X) = 3\sqrt{3}$.
Soit n le nombre de lignes téléphoniques ; elles sont toutes occupées si $X \geqslant n$ *(si $X > n$, certaines personnes qui le souhaitent ne peuvent pas téléphoner)*. On doit donc déterminer la valeur minimale de n pour laquelle $P\Big([X \geqslant n]\Big) \leqslant 0,025$.
On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ou une approximation par une loi normale :

Bienaymé-Tchebychev

$\dfrac{X - E(X)}{\sigma}$ est une variable centrée réduite (espérance égale à 0, écart type égal à 1), donc
$P\left(\dfrac{\big|X - E(X)\big|}{\sigma} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

En considérant que $P\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma} \geqslant \varepsilon\right)$ et $P\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma} \leqslant -\varepsilon\right)$ sont quasiment égaux (ce qui est une approximation), il suffit de prendre $\dfrac{1}{\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{0,025}{2}$ c'est à dire $\varepsilon \geqslant \sqrt{20}$.

$\left[\dfrac{X - 30}{3\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{20}\right] = \big[X \geqslant 30 + 3\sqrt{3 \times 20}\big]$, donc n est au minimum égal à 54.

Loi normale

On approxime une loi binômiale $\mathscr{B}(300, \frac{1}{10})$ par une loi normale $\mathscr{N}(30, 27)$ (27 est la variance σ^2).
$P\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma} \geqslant \varepsilon\right)$ est à peu près égal à $1 - \Phi(\varepsilon)$, donc il suffit de prendre ε tel que $\Phi(\varepsilon) \geqslant 1 - 0,025$.
Or$\Phi(1,96) \simeq 0,975$ donc l'événement $\big[X \geqslant 30 + (1,96 \times 3\sqrt{3})\big]$ a une probabilité inférieure ou égale à $0,025$ ce qui donne $n \geqslant 41$.

Remarque : L'approximation par la loi normale est bien plus précise qu'avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la valeur trouvée pour n est nettement inférieure ; ce n'est pas surprenant car cette inégalité est valable quelle que soit la loi (à condition que la variance existe toutefois).

Exercice 3

Les lancers sont supposés indépendants, le dé normal donc la probabilité d'obtenir 6 pour un lancer quelconque est de $\frac{1}{6}$ et le nombre X de *pile* obtenus suit une loi binômiale $\mathscr{B}\left(9\,000, \dfrac{1}{6}\right)$ $(E(X) = 1\,500,\ V(X) = 1\,250$ d'où $\sigma_X = 25\sqrt{2}$.

$\star$ Par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, on a $P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$, d'où avec $\varepsilon = 100$,

$P\left(|X - 1\,500| \geqslant 100\right) \leqslant \dfrac{1\,250}{10\,000} = 0,125$, donc la probabilité cherchée est supérieure ou égale à $0,875$.

$\star$ En approximant la loi de X par une loi normale de paramètres $1\,500$ et $1\,250$, on obtient :

$P\left(\dfrac{|X - 1\,500|}{25\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{100}{25\sqrt{2}}\right) \simeq \Phi\left(2\sqrt{2}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{2}\right) \simeq 0,9954.$

Exercice 4

Le nombre de fautes d'orthographe X suit une loi $\mathscr{B}\left(200, \dfrac{1}{500}\right)$, donc d'espérance $0,4$ et de variance $0,0998$.

On peut approximer cette loi par une loi de Poisson de paramètre $0,4$.

Donc $P(X \leqslant 5) \simeq e^{-0,4}\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\dfrac{(0,4)^k}{k!} \simeq 0,999\,996$

Exercice 5

$X \hookrightarrow \mathscr{P}(10)$ donc pour $k \in \mathbb{N}$, $P\big([X = k]\big) = \dfrac{e^{-10}\,10^k}{k!}$.

a Pour $k \in \mathbb{N}$, le rapport $\dfrac{P\big([X = k]\big)}{P\big([X = k+1]\big)} = \dfrac{k+1}{10}$, donc $P\big([X = k]\big)$ croit pour $k \leqslant 11$ et décroît ensuite ; remarquer que les probabilités sont égales pour $k = 10$ et $k = 11$.

b Il s'agit de calculer $P\big([7 \leqslant X \leqslant 12]\big)$ qui vaut $\displaystyle\sum_{k=7}^{12}\dfrac{e^{-10}\,10^k}{k!} \simeq 0,66$.

c Si l'on considère que le déclassement d'un œuf est indépendant de celui des autres, $Y_N \hookrightarrow \mathscr{B}(N, \frac{3}{100})$.

d (i) $E(Y_{4000}) = 120$ et $V(Y_{4000}) = 120 \times 0,97 = 116,4$ donc la loi de Y_N peut être approchée par une loi normale de paramètres 120 et $116,4$.

Donc une densité de cette loi approchée est pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{232,8\,\pi}}\exp\left(-\frac{(x-120)^2}{232,8}\right)$, et la fonction de répartition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) $\varphi'(x) = f(x+h) - f(x-h)$ s'annule pour $x = 120$ ($\exp\left(-\frac{(x+h-120)^2}{232,8}\right)$ et $\exp\left(-\frac{(x-h-120)^2}{232,8}\right)$ sont égaux) et φ est maximale pour $x = 120$, donc $b - a$ étant fixé, la probabilité cherchée (plus exactement une valeur approchée de cette probabilité, obtenue en utilisant la loi normale) sera maximale si le segment $[a, b]$ est centré en 120, c'est à dire $a + b = 240$ *(on peut poser $a = 120 - h$ et $b = 120 + h$, avec $h > 0$ égal à la moitié de l'amplitude de l'intervalle).*

(iii) Notons Z la variable aléatoire qui approxime Y_N, ($Z \hookrightarrow \mathscr{N}(120\,;\,116,4)$; la probabilité d'avoir $a \leqslant Z \leqslant b$ est donnée par : $P\big([a \leqslant Z \leqslant b]\big) = P\big([\frac{a-120}{\sqrt{116,4}} \leqslant \frac{Z-120}{\sqrt{116,4}} \leqslant \frac{b-120}{\sqrt{116,4}}]\big)$.

La probabilité est maximale si $b - a$ est donné, revient à dire que la probabilité étant fixée (à $0,95$ ici) l'amplitude est minimale ; ainsi l'intervalle $[a, b]$ cherché est tel que $a + b = 240$, donc avec $a = 120 - h$ et $b = 120 + h$, on obtient : $P\big([\frac{-h}{\sqrt{116,4}} \leqslant \frac{Z-120}{\sqrt{116,4}} \leqslant \frac{h}{\sqrt{116,4}}]\big) \geqslant 0,95$.

Or $\frac{Z-120}{\sqrt{116,4}}$ suit une loi normale centrée réduite, d'où

$P\big([\dfrac{-h}{\sqrt{116,4}} \leqslant \dfrac{Z-120}{\sqrt{116,4}} \leqslant \dfrac{h}{\sqrt{116,4}}]\big) = \phi\left(\dfrac{-h}{\sqrt{116,4}}\right) - \phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{116,4}}\right) = 2\,\phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{116,4}}\right) - 1 \geqslant 0,95.$

$\phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{116,4}}\right) \geqslant 0,975$ ce qui, en consultant la table, donne $\dfrac{h}{\sqrt{116,4}} \geqslant 1,96$ donc $h \geqslant 21,4$.

L'amplitude minimale de l'intervalle est égale à $42,8$; $[a, b] = [98,6\,;\,141,4]$ est l'intervalle cherché.

Exercice 6

a $Z_{n,x} \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, F(x)\big)$, donc $E\big(Z_{n,x}\big) = n\,F(x)$ et $V(Z_{n,x}) = n\,F(x)\,\big(1 - F(x)\big)$.
La fonction $u \mapsto u\,(1-u)$ définie sur $[0,1]$ admet un maximum égal à $\frac{1}{4}$, atteint pour $u = \frac{1}{2}$, donc $V(Z_{n,x}) \leqslant \dfrac{n}{4}$.

b L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P\Big(\big|T_{n,x} - F(x)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{V(T_{n,x})}{\varepsilon^2}$.
Or $V(T_{n,x}) = \dfrac{V(Z_{n,x})}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{4\,n}$; ainsi $P\Big(\big|T_{n,x} - F(x)\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{1}{4\,n\,\varepsilon^2}$ tend vers 0 à ε fixé lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7

a S_n suit une loi de Poisson de paramètre n (cours).

b $P\Big(S_n \leqslant n\Big) = \mathrm{e}^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

c $E(S_n) = V(S_n) = n$. D'après le théorème de la limite centrée, $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(S_n \leqslant n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\Big) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.