MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°4
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$.
Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t)$$

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, il est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.
On suppose alors que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i, définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, de même loi que T. Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes.
Pour tout entier strictement positif n, soit U_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui représente le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

1. **Coefficient d'avarie**
   Dans cette sous-partie, la loi de la variable aléatoire T est telle que, pour tout entier naturel n, l'on ait : $D(n) \neq 0$.
   Un composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n-1])$$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$ en fonction de $D(n)$ et de $D(n-1)$, et en déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

   (b) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.
      i. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?
      ii. Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

iii. En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

(c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \alpha$$

i. Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha).D(n-1)$.

ii. En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

2. Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier

On suppose, dans cette sous-partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$, que la loi de T est donnée par :

$$\mathbf{P}([T=1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([T=2]) = 1-p$$

Pour tout entier strictement positif n, soit R_n la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, prenant la valeur 1 si une panne survient à l'instant n et la valeur 0 sinon. Son espérance est notée r_n.

(a) i. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

ii. Calculer r_1 et r_2.

(b) Soit n un entier strictement positif.

i. À l'aide de la formule des probabilités totales, écrire une relation donnant $\mathbf{P}([R_{n+2}=1])$ en fonction de $\mathbf{P}([R_{n+1}=1])$ et de $\mathbf{P}([R_n=1])$.

ii. En déduire l'égalité $r_{n+2} = pr_{n+1} + (1-p)r_n$.

(c) i. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ r_n = \dfrac{1}{2-p} + B(p-1)^n$ où B est une constante réelle que l'on précisera.

ii. En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{1}{E(T)}$

(d) Soit n un entier strictement positif. Exprimer la variable aléatoire U_n à l'aide des variables aléatoires R_i, calculer l'espérance $E(U_n)$ et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

3. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul k, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$. ($S_k$ désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement.)

(a) Soit m un entier naturel. Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité : $\sum\limits_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

(b) i. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

ii. Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k\,,\ \mathbf{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

(c) Soit n un entier strictement positif.

i. Établir l'égalité $\mathbf{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$.

ii. Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, l'événement $[U_n \geqslant k]$ à l'aide de la variable aléatoire S_k.

iii. En déduire que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

(d) Dans cette question, le nombre p est égal à $\dfrac{1}{200}$.
On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

i. Préciser la loi de la variable aléatoire U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus.

ii. On désire qu'avec une probabilité de $0,95$, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus. A combien peut-on évaluer ce stock ?
On donne : $\sqrt{\dfrac{995}{2}} \simeq 22,3$ et, en désignant par Φ la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite, $\Phi(1,65) \simeq 0,95$.

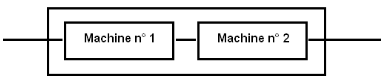
Partie 2

Un dispositif est constitué de machines dont l'état est indépendant de celui des autres. Ces machines peuvent être reliées de différentes façons :

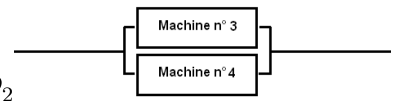
- Ces machines sont dites « en série » , si le dispositif est en panne dès que l'une d'elles est en panne.
- Ces machines sont dites « en parallèle » , si le dispositif est en panne à la seule condition que toutes les machines le soient.

Considérons alors les trois dispositifs suivants :

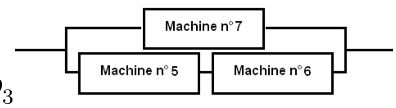
- Le premier $\mathcal{D}_1$, dispositif « série » , est constitué de deux machines en série.
- Le deuxième $\mathcal{D}_2$, dispositif « parallèle » , est constitué de deux machines en parallèle.
- Le troisième $\mathcal{D}_3$, dispositif « mixte » , est constitué de trois machines .



$\mathcal{D}_1$



$\mathcal{D}_2$



$\mathcal{D}_3$

<u>Hypothèses</u> :

- Toutes les machines sont en état de marche à l'instant $t = 0$..
- La probabilité pour chaque machine de n'avoir subi aucune panne entre les instants 0 et t vaut $q_t = \exp(-t)$.

<u>Notations</u> :
Le temps d'attente d'une première panne de la machine M_i est un aléa noté X_i. où i varie de 1 à 7.
Les temps d'attente d'une première panne globale sur les dispositifs 1, 2, 3 seront notées respectivement $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$.

1. Dans cette première question, nous considérerons un résultat ω de cette expérience aléatoire pour lequel les valeurs de $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7$ valent respectivement :

$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$X_4(\omega)$	$X_5(\omega)$	$X_6(\omega)$	$X_7(\omega)$
1,09	2,28	1,11	1,80	0,24	2,09	0.26

- À l'instant t = 1,5 , indiquer les machines puis les dispositifs qui sont déjà tombés en panne.

- Par un raisonnement analogue, compléter le tableau suivant (dont vous venez de déterminer la colonne t=1,5)

	t = 0	t = 0,5	t = 1	t = 1,5	t = 2	t = 2,5	t = 3
D_1	1						
D_2	1						
D_3	1						

où $\begin{cases} D_1=1 \text{ si } \mathcal{D}_1 \text{ sans panne entre les instants 0 et t et } D_1=0 \text{ sinon} \\ D_2=1 \text{ si } \mathcal{D}_2 \text{ sans panne entre les instants 0 et t et } D_2=0 \text{ sinon} \\ D_3=1 \text{ si } \mathcal{D}_3 \text{ sans panne entre les instants 0 et t et } D_3=0 \text{ sinon} \end{cases}$

2. De manière générale, que peut-t-on dire de $X_1(\omega)$ si la machine M_1 n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t ?
En déduire en vous appuyant sur les hypothèses la valeur de $P(X_1 \leq t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
Question subsidiaire cours de Terminale S

Vérifiez que X_1 suit la Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

3. Nous allons déterminer les fonctions de répartition des variables Y_1, Y_2, Y_3.

(a) Justifier l'égalité $Y_1 = \min(X_1, X_2)$.
En déduire $\mathrm{P}(Y_1 > t)$ puis $\mathrm{P}(Y_1 \leq t)$ pour tout réel $t > 0$.

(b) Exprimer de la même manière Y_2 en fonction de X_3 et X_4.
En déduire $\mathrm{P}(Y_2 \leq t)$ pour tout réel $t > 0$.

(c) Exprimer de la même manière Y_3 en fonction de X_5, X_6 et X_7.
En déduire $\mathrm{P}(Y_3 \leq t)$ pour tout réel $t > 0$.