Devoir maison 9

à rendre pour le mercredi 25 janvier

EXERCICE

Soient n un entier strictement positif et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ la matrice carrée d'ordre n telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j=n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer A^2.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.
   indication : observer qu'il est nécessaire de distinguer deux cas selon la parité de n

PROBLÈME

On note $\mathcal{B}$ la base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$.
On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, respectivement $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à cœfficients dans $\mathbb{C}$, respectivement dans $\mathbb{R}$.
On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On note g l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est J.
Pour tout quadruplet $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note M_A la matrice $M_A = \sum_{k=1}^{4} a_k\, J^{k-1}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M_A.
On utilisera, sans chercher à le justifier, le fait que, pour tout $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, $M^0 = I$.

Première partie

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
2. On note $\mathrm{Sp}\,(g)$ l'ensemble des valeurs propres de g.
   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}\,(g) = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$
   (b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre formée de vecteur(s) dont la première coordonnée vaut 1.
   (c) g est-il diagonalisable ?
3. On considère un quadruplet $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.
   (a) Calculer les cœfficients de M_A.
   (b) Montrer que f_A est combinaison linéaire de id, g, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.
   (c) Calculer l'image par f_A des vecteurs propres déterminés au 2b.
   (d) En déduire que l'endomorphisme f_A est diagonalisable et donner une matrice diagonale à laquelle M_A est semblable.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de $M(z)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes pour lesquelles la matrice $M(z)$ est inversible.
   (c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Calculer $[M(1)]^k$ et $\big(M(z) - M(1)\big)^k$ puis, en remarquant que $M(z) = \big(M(z) - M(1)\big) + M(1)$, en déduire une expression de $[M(1)]^n$ à l'aide de z, n, $M(1)$ et I.

5. Application.
   (a) Écrire un algorithme fournissant le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (b) Écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ utilisant l'algorithme précédent. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (c) Soit z un réel, écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième de $M(z)$ en utilisant la formule obtenue au 4c. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ? *(On comptera $n-1$ produits si l'on effectue z^n).*

Deuxième partie

On note E l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 les fonctions polynomiales suivantes :

$$\varepsilon_0 : x \longmapsto 1\,, \quad \varepsilon_1 : x \longmapsto x\,, \quad \varepsilon_2 : x \longmapsto x^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 : x \longmapsto x^3$$

On rappelle que $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Pour toute fonction polynomiale P, on note $h(P)$ l'application

$$x \longmapsto (1-x^2)\left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + x\left(\frac{P''(0)}{2} - P(0)\right)\right)$$

1. Montrer que h est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de h.
4. Déterminer une base de l'image et du noyau de h.