Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°10 - A remettre le mercredi 11 mars 2015

« Aléa Géométrique N - Maximum de N variables aléatoires Exponentielles indépendantes. »

Exercice

On admettra le résultat de cours suivant :

> Pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie par :
>
> $$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(w-t) f_V(t) dt$$

Soient U, V, W trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de Loi Uniforme sur [0,1].

1. Déterminer une densité g continue de la somme des variables U et V. *En donner le graphe !*

2. Déterminer une densité h continue de la somme de trois variables U, V et W. *En donner le graphe !*

3. Donner les instructions en python qui permettent d'obtenir le graphe de h.

Problème

Dans cet exercice, a et b sont deux réels positifs et s un réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Établir la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a} \, \mathrm{d}u$

(b) Calculer J *(on pourra commencer par calculer $a\,J$).*

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre b. On considère également une variable aléatoire N définie sur ce même espace probabilisé, indépendante des Y_k, suivant une loi géométrique de paramètre s et de support $\mathbb{N}^*$. On admet que $Z = \max(Y_1, \ldots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité. On rappelle que si $\omega \in \Omega$, alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels $Y_1(\omega), \ldots, Y_{N(\omega)}(\omega)$.

1. Soit j un entier strictement positif et t un réel positif.
Calculer la probabilité conditionnelle $P_{N=j}(Z \leq t)$.

2. (a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

(b) Déterminer une densité de Z.

3. Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \dfrac{-\ln s}{b\,(1-s)}$.

4. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 1$ et $g(t) = \dfrac{t \exp(-t)}{1 - \exp(-t)}$ si $t > 0$.

(a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) Établir pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité suivante :

$$g(t) = g(t) \exp\big(-(n+1)\,t\big) + \sum_{k=0}^{n} t \exp\big(-(k+1)\,t\big)$$

5. Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} t \exp\big(-(k+1)\,t\big) \, \mathrm{d}t$ et la calculer.

6. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} g(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

7. On admet que la somme de cette série est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0,1[$ $\left(\textit{c'est à dire } \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln s}{b\,(1-s)} \, ds\right)$ est égale à $\dfrac{\pi^2}{6\,b}$.