Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°5 - A remettre le mercredi 19 novembre 2014

≪ Simulation & Intervalles de confiance - Probabilités - Analyse ≫

Simulation - Intervalle de confiance

1. Soit L une liste de N objets et p un entier compris entre 1 et N.
On choisit au hasard successivement et sans remise p objets de cette liste L : les objets choisis sont rangés dans l'ordre de leur prélèvement dans une nouvelle liste C.

Ecrire le script d'une fonction `Choisir` dont les arguments d'entrée sont `L` et `p` qui renvoie la liste aléatoire `C`.

2. Nous vous proposons un jeu qui oppose une banque à un joueur.
On considère une urne contenant N_1 boules rouges et N_2 boules blanches.
Le capital initial du joueur vaut a euros, celui de la banque vaut b euros.

Nous supposerons $0 < a < N_2 < N_1 < b$.

On prélève une à une et sans remise les $N = N_1 + N_2$ boules de l'urne.

- Chaque fois qu'une boule rouge est prélevée, la banque verse 1 euro au joueur sauf si le capital du joueur avant ce tirage vaut 0
- Chaque fois qu'une boule blanche est prélevée, le joueur verse 1 euro à la banque sauf si le capital du joueur avant ce tirage vaut 0.

Nous désignerons par S la variable aléatoire égale au capital du joueur à l'issue du jeu

Ecrire le script d'une fonction `Simulation` dont les arguments d'entrée sont `a,N1,N2` et qui renvoie l'alea `S`.

3. Nous allons simuler 10000 parties dans la situation $N_1 = 18$, $N_2 = 17$ et $a = 5$ en exécutant 10000 fois l'instruction :

```
S=Simulation(a,N1,N2)
```

- Écrire alors un programme qui permette de comptabiliser le nombre moyen de ruines et le gain moyen du joueur sur ces 10000 parties.
- En utilisant votre cours de Terminale, déterminer au vu des résultats obtenus dans votre simulation :
  — l'intervalle de confiance de la probabilité de ne pas être ruiné au cours d'une partie.
  — l'intervalle de confiance de l'espérance de la variable aléatoire S.

Probabilités

Une urne contient n boules noires et 3 boules blanches B_1, B_2 et B_3 . On tire les boules les unes après les autres au hasard sans remise. On désigne par N_1 le rang de la première boule blanche tirée, par N_2 celui de la deuxième boule blanche tirée et par N_3 celui de la troisième boule blanche tirée. On désigne par R_1 le rang de la boule B_1, par R_2 celui de B_2 et par R_3 celui de B_3.

1. Proposer une modélisation des expériences (c'est-à-dire un univers Ω et une probabilité P qui rende compte des expériences).

2. Exprimer N_1 et N_3 en fonction de R_1, R_2 et R_3.

3. Montrer que R_1, R_2 et R_3 ont même loi, et déterminer cette loi.

4. Déterminer la loi du couple (R_1, R_3), puis celle du couple (N_1, N_3).

5. En déduire la loi de N_1 et calculer l'espérance de N_1.

6. Calculer l'espérance de N_3.

Analyse

1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-1;1]$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + \dfrac{(-1)^n x^n}{1+x}$.

(b) En déduire l'égalité : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$.

(c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ converge et que sa somme vaut $\ln(1+x)$.

2. Déduire de la question **1.** les égalités suivantes :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad\qquad \ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

3. Soit (u_n) une suite décroissante de nombre réels qui converge vers 0.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par S_n la somme partielle de rang n de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}u_k$.

(a) Démontrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}u_k$ est convergente et que sa somme S vérifie l'encadrement :

$$\forall n \geq 1\,,\ S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$$

(c) En déduire : $\forall n \geq 1\,,\ |S_n - S| \leq u_n$.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près pour tout entier naturel $n \geq N_p$.

4. Soit p un entier naturel.
On se propose maintenant de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{k2^k}$.
On introduit pour cela, pour tout $n \geq 1$, le reste de rang n de la série : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k2^k}$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'encadrement : $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

(b) Déterminer un entier naturel $N_p^{'}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k2^k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} près, pour tout entier naturel $n \geq N_p^{'}$.

(c) Comparer les deux entiers N_p et $N_p^{'}$.