Correction du devoir n°7

1. (a) A_2 est réalisé si et seulement si on a utilisé deux fois l'urne U ou deux fois l'urne V ; donc $A_2 = \big(U_1 \cap U_2\big) \cup \big(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2\big)$. Cette réunion est disjointe donc $P(A_2) = \big(U_1 \cap U_2\big) + P\big(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2\big)$. U_1 et U_2 sont indépendants, donc $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$ aussi, et $P(A_2) = \big(U_1\big) \times P\big(U_2\big) + P\big(\overline{U}_1\big) \times P\big(\overline{U}_2\big)$. $P(U_n)$ ne dépend pas de n et vaut α, $P(V_n)$ ne dépend pas de n et vaut β, d'où $\boxed{P(A_2) = p^2 + q^2}$

   (b) B_2 est réalisé si et seulement si on a utilisé l'urne U puis l'urne V, ou bien l'urne V puis l'urne U ; donc $B_2 = \big(U_1 \cap \overline{U}_2\big) \cup \big(\overline{U}_1 \cap U_2\big)$. On en déduit :
   $P(B_2) = P\big(U_1 \cap \overline{U}_2\big) + P\big(\overline{U}_1 \cap U_2\big)$ car la réunion est disjointe
   $P(B_2) = P\big(U_1\big) \times P\big(\overline{U}_2\big) + P\big(\overline{U}_1\big) \times P\big(U_2\big)$ car les événements U_1 et $\overline{U}_2$ sont indépendants ainsi que les événements et $\overline{U}_1$ et U_2. Finalement $\boxed{P(B_2) = 2\,p\,q}$

2. (a) C_1 est l'événement certain puisqu'au départ les deux urnes sont vides ; donc après une étape l'une des deux contient une boule et l'autre est vide ; ainsi $\boxed{\gamma_1 = 1}$
   C_2 est l'événement impossible puisqu'après une étape l'une des deux urnes est vide et l'autre pleine ; donc soit on remplit l'urne vide, soit on vide l'urne pleine, et on ne peut réaliser que A_2 ou B_2 ; ainsi $\boxed{\gamma_2 = 0}$

   (b) Supposons l'événement $A_n \cup B_n$ réalisé : à l'issue de l'étape n, les deux urnes sont dans le même état, vides toutes les deux ou pleines toutes les deux ; comme à l'étape suivante on travaille sur une et une seule des deux urnes, elles sont nécessairement dans des états différents après la $n+1^{\text{e}}$ étape, ainsi C_{n+1} est réalisé.

   De même si C_n est réalisé les deux urnes sont dans des états différents à l'issue de la n^{e} étape, soit on vide l'urne pleine à l'étape $n+1$ et on réalise A_{n+1}, soit on remplit l'urne vide et on réalise B_{n+1} ; ainsi on réalise $A_{n+1} \cup B_{n+1}$.

   (c) $(A_n \cup B_n) \subset C_{n+1} \Longrightarrow P\big(A_n \cup B_n\big) \leqslant P(C_{n+1})$ et comme $\Big(A_n,\, B_n,\, C_n\Big)$ forment un système complet d'événements, A_n et B_n sont incompatibles et $A_n \cup B_n = \overline{C_n}$; ainsi $P\big(A_n \cup B_n\big) = P\big(A_n\big) + P\big(B_n\big) = 1 - P(C_n)$. On obtient donc $\boxed{1 - \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1}}$

   De même, $C_{n+1} \subset (A_{n+2} \cup B_{n+2}) \Longrightarrow P\big(C_{n+1}\big) \leqslant P\big(A_{n+2} \cup B_{n+2}\big)$, d'où $\gamma_{n+1} \leqslant \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} = 1 - \gamma_{n+2}$.

   (d) Soit pour $k \in \mathbb{N}$, la propriété P_k : $\gamma_{2k} = 0$ et $\gamma_{2k+1} = 1$.
   On a vu (question 2a) que $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 0$, et on convient (voir préliminaires) que $C_0 = \varnothing$ donc $\gamma_0 = 0$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons P_k vérifiée c'est à dire $\gamma_{2k} = 0$ et $\gamma_{2k+1} = 1$; on a alors d'après l'encadrement établi à la question précédente : $1 - \gamma_{2k} \underset{\mathbf{1}}{\leqslant} \gamma_{2k+1} \underset{\mathbf{2}}{\leqslant} 1 - \gamma_{2k+2}$ (avec $n = 2\,k$).
   L'inégalité **2** donne $1 \leqslant 1 - \gamma_{2k+2}$, c'est à dire $\gamma_{2k+2} \leqslant 0$ et comme il s'agit d'une probabilité, $\gamma_{2k+2} = 0$. On réutilise cet encadrement avec $n = 2\,k + 2$: $1 - \gamma_{2k+2} \underset{\mathbf{1}}{\leqslant} \gamma_{2k+3} \underset{\mathbf{2}}{\leqslant} 1 - \gamma_{2k+4}$
   Cette fois, l'inégalité **1** permet de conclure : $1 \leqslant \gamma_{2k+3}$ et comme γ_{2k+3} est une probabilité, on déduit $\gamma_{2k+3} = 1$.
   On a bien établi la propriété P_{k+1} : $\gamma_{2(k+1)} = 0$ et $\gamma_{2(k+1)+1} = 1$.

3. (a) A_{2k} est réalisé si et seulement si les deux urnes sont vides après la $2k^{\text{e}}$ étape, donc $P_{A_{2k}}\big(A_{2k+2}\big)$ est la probabilité d'avoir deux urnes vides après l'étape $2k+2$, sachant qu'elles le sont après l'étape $2k$, c'est à dire de remplir puis vider U aux étapes $2k+1$ et $2k+2$ (proba p^2), ou de remplir puis vider V (proba q^2) ces deux possibilités étant incompatibles. Ainsi $P_{A_{2k}}\big(A_{2k+2}\big) = p^2 + q^2 = P(A_2)$

(b) $\left(A_{2k},\,\overline{A_{2k}}\right)$ est un système complet d'événements donc on peut utiliser la formule des probabilités totales : $P\big(A_{2k+2}\big) = P(A_{2k}) \times P_{A_{2k}}(A_{2k+2}) + P(\overline{A_{2k}}) \times P_{\overline{A_{2k}}}(A_{2k+2})$ d'où : $\alpha_{2k+2} = \alpha_{2k} \times \alpha_2 + \beta_{2k} \times \beta_2$; car $P_{\overline{A_{2k}}}(A_{2k+2}) = \beta_2$, la justification étant analogue à celle de la question 3a. Finalement, $\alpha_{2k+2} = (p^2+q^2)\,\alpha_{2k} + 2\,p\,q\,\beta_{2k}$.

(c) $\gamma_{2k} = 0$, donc $\beta_{2k} = 1 - \alpha_{2k}$ ce qui donne : $\alpha_{2k+2} = (p^2+q^2)\,\alpha_{2k} + 2\,p\,q\,(1-\alpha_{2k})$

$$\begin{aligned} &= (p^2+q^2-2\,p\,q)\,\alpha_{2k} + 2\,p\,q \\ &= (p-q)^2\alpha_{2k} + 2\,p\,q \end{aligned}$$

Pour $k=0$, on a $\alpha_0 = 1$, $\alpha_2 = p^2+q^2 = 1-2\,p\,q$ donc la relation reste vérifiée.

(d) Une suite arithmético-géométrique vérifie une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b$ où a et b sont des constantes ; ici $a = (p-q)^2$ et $b = 2\,p\,q$.

On résout l'équation $\ell = (p-q)^2\ell + 2\,p\,q$: $\ell\Big(1-(p-q)^2\Big) = 2\,p\,q$

$$\ell\Big((p+q)^2-(p-q)^2\Big) = 2\,p\,q$$

$$4\,p\,q\,\ell = 2\,p\,q \text{ donc } \boxed{\ell = \frac{1}{2}}$$

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{2k} - \dfrac{1}{2} = \Big((p-q)^2\Big)^k(\alpha_0 - \dfrac{1}{2})$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{2k} = \dfrac{1}{2} + \big(p-q\big)^{2k} \times \dfrac{1}{2}$.

(e) $\beta_{2k} = 1 - \alpha_{2k} = 1 - \dfrac{1}{2} - \big(p-q\big)^{2k} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(1-\big(p-q\big)^{2k}\Big)$

4. (a) $V_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \subset A_n$; or pour n impair, $n = 2\,k+1$, $\gamma_{2k+1} = 1$ donc $A_{2k+1} = \varnothing$; d'où $V_{2k+1} = \varnothing$ et $P(V_{2k+1}) = 0$.

(b) $V_2 = A_2$ car le premier retour à des urnes vides ne peut se faire avant la deuxième étape $(A_1 = \varnothing)$; donc $P(V_2) = P(A_2) = \alpha_2 = 1 - 2\,p\,q$.

(c) $V_4 = \overline{A_2} \cap A_4 = B_2 \cap A_4$, car $\overline{A_1} = \overline{A_3} = \Omega$ (événement certain) et $\overline{A_2} = B_2$ $(C_2 = \varnothing)$.

$P(V_4) = P(B_2) \times P_{B_2}(A_4) = \beta_2 \times \beta_2$ $\boxed{P(V_4) = 4\,p^2q^2}$

(d) Aux étapes de rang n impair, C_n est l'événement certain, aux étapes de rang n pair $(A_n,\,B_n)$ est un système complet d'événements, donc V_{2k+2} est réalisé si et seulement si $B_2, B_4, \ldots, B_{2k}$ le sont, puis A_{2k+2} : $V_{2k+2} = \overline{A_2} \cap \overline{A_4} \cap \ldots \cap \overline{A_{2k-2}} \cap A_{2k} = B_2 \cap B_4 \cap \ldots \cap B_{2k} \cap A_{2k+2}$.

$$P\big(V_{2k+2}\big) = \underbrace{P(B_2)}_{\beta_2} \times \underbrace{P_{B_2}\big(B_4\big)}_{\alpha_2} \times \cdots \times \underbrace{P_{B_2\cap\ldots\cap B_{2k-2}}\big(B_{2k}\big)}_{\alpha_2} \times \underbrace{P_{B_2\cap\ldots\cap B_{2k}}\big(A_{2k+2}\big)}_{\beta_2} = \beta_2\big(\alpha_2\big)^{k-1}\beta_2$$

5. (a) F est réalisé si et seulement si l'un des V_n est réalisé, ce qui se produit nécessairement après un nombre pair d'étapes, et supérieur ou égal à deux : $F = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{2k}$.

(b) Les événements V_n sont deux à deux incompatibles donc :

$$P(F) = \sum_{k=1}^{\infty} P\big(V_{2k}\big) = P(V_2) + \sum_{k=2}^{\infty} \big(\beta_2\big)^2\big(\alpha_2\big)^{k-2} = \big(1-2\,p\,q\big) + 4\,p^2\,q^2\sum_{j=0}^{\infty}(1-2\,p\,q)^j$$

$$= 1 - 2\,p\,q + \frac{4\,p^2q^2}{1-(1-2\,p\,q)} = 1$$

F est un événement presque certain donc le jeu s'arrête au bout d'un temps fini avec la probabilité 1.

Remarque : on a plusieurs façons de voir que $1 - 2\,p\,q \in]0,1[$:

- ⋆ C'est la probabilité de réaliser B_2 et comme la pièce a une probabilité non nulle de donner pile et de donner face, B_2 ne peut ni être l'événement certain, ni l'événement impossible.
- ⋆ $1 - 2\,p\,q = 2\,p^2 - 2\,p + 1$, donc on peut étudier la fonction $p \mapsto 2\,p^2 - 2\,p + 1$ sur $]0,1[$ et montrer qu'elle admet un minimum égal à $1/2$ pour $p = 1/2$, et qu'elle est maximale en 0 et en 1, égale à 1 en ces deux points.