

Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°15 - A remettre le mercredi 15 février 2012

a et b sont deux réels positifs, $s \in]0, 1[$.

1. (a) Établir la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a} du$

(b) Calculer J (on pourra commencer par calculer aJ).

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre b . On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des Y_k , suivant une loi géométrique de paramètre s . On admet que $Z = \max(Y_1, \dots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si $\omega \in \Omega$, alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels $Y_1(\omega), \dots, Y_N(\omega)$.

2. Soit j un entier strictement positif et t un réel positif; Calculer la probabilité conditionnelle $P_{N=j}(Z \leq t)$.

3. (a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z .

(b) Déterminer une densité de Z .

4. Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \frac{-\ln s}{b(1-s)}$.

5. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(0) = 1$ et $g(t) = \frac{t \exp(-t)}{1 - \exp(-t)}$ si $t > 0$.

(a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) Établir pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité suivante :

$$g(t) = g(t) \exp(-(n+1)t) + \sum_{k=0}^n t \exp(-(k+1)t)$$

6. Justifier, pour tout entier naturel k , la convergence de l'intégrale $\int_0^{\infty} t \exp(-(k+1)t) dt$ et la calculer.

7. Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{\infty} g(t) dt$ est convergente et égale à $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

8. On admet que la somme de cette série est égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$ (c'est à dire $\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)} ds$) est égale à $\frac{\pi^2}{6b}$.