Corrigé

EXERCICE N°1

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (ka_{k-1} - ka_k) = \sum\limits_{h=0}^{n-1} (h+1)a_h - \sum\limits_{k=0}^{n} ka_k$, et par télescopage : $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k - na_n \quad (\star)$

2. (a) • La série $\sum a_n$ converge donc le reste d'ordre n tend vers 0, de même pour le reste d'ordre $2\,n$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(R_{2n}(a) - R_n(a)\big) = 0$

   • La suite (a_n) décroit donc $\forall k \in [\![n+1, 2\,n]\!]$, $a_k \geqslant a_{2n}$, d'où :

   $-\big(R_{2n}(a) - R_n(a)\big) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant n\,a_{2n} \geqslant 0$ car (a_n) est une suite à termes positifs.

   Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,n\,a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$.

   (b) L'égalité $(\star)$ montrée à la question 1 et l'existence de la limite de $n\,a_n$ entrainent la convergence de la série $\sum b_n$.

   De plus, comme $n\,a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, les sommes des deux séries $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} b_n\right)$ sont égales.

3. (a) • $\sum\limits_{j=n+1}^{n+k} b_j = \sum\limits_{j=1}^{n+k} b_j - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{k=0}^{n+k-1} a_k - (n+k)\,a_{n+k} - \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k - n\,a_n\right) = \sum\limits_{k=n}^{n+k-1} a_k + n\,a_n - (n+k)\,a_{n+k}$

   Comme $\sum\limits_{k=n}^{n+k-1} a_k \geqslant k\,a_{n+k}$, il vient bien : $\sum\limits_{j=n+1}^{n+k} b_j \geqslant n\,(a_n - a_{n+k})$.

   • On a donc : $\forall k \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 0$, $\quad n\,a_n \leqslant n\,a_{n+k} + \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j$. On fixe n, on fait tendre k vers l'infini, comme $a_{n+k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient : $0 \leqslant n\,a_n \leqslant R_n(b)$. Ceci est vrai pour toute valeur de n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$ (par théorème d'encadrement).

   (b) En reprenant l'égalité $(\star)$ on obtient la convergence de $\sum a_n$ et l'égalité des sommes.

EXERCICE N°2

1. La fonction f_n'', donc également la fonction $|f_n''|$, est continue sur $[a, b]$ qui est un segment, donc est bornée sur ce segment et atteint ses bornes, en particulier son maximum. On note α_n le maximum de $|f_n''|$; il existe alors un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $|f''(x_n)| = \alpha_n$.

2. (a) • Soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ donc on peut appliquer la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1, d'où l'existence d'un réel $c_n \in [a, b]$ tel que : $f_n(x+h) - f_n(x) = h\,f_n'(x) + \frac{h^2}{2} \times f_n''(c_n) \quad (\star\star)$

   • D'après l'égalité précédente, pour $h \neq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x+h) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - \frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n} f_k''(c_k)\right)$.

   $|f_k''(c_k)| \leqslant \alpha_k$, donc $\sum f_n''(c_n)$ est une série absolument convergente (donc convergente), par conséquent la série $\sum f_n'(x)$ est la somme de 3 séries convergentes.

   • L'égalité $(\star\star)$ donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x+h) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - h\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n} f_k''(c_k)$.

   Toutes les sommes partielles convergent donc, par passage à la limite, on obtient :

   $$\left|S(x+h) - S(x) - h\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| = \frac{h^2}{2}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n''(c_n)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n''(c_n)| \leqslant \frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$$

   (b) En divisant par $|h|$ et en passant à la limite, on obtient : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| = 0$.

   Par définition du nombre dérivé en un point, on a bien $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$

3. Posons $f_n \,:\, x \mapsto d_n\,x^n$; f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\rho, \rho[$.
   $f_n''(x) = n\,(n-1)\,d_n\,x^{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ et 0 pour $n = 0$ ou 1.
   La suite $(|d_n|\,\rho^n)$ étant bornée –donc en particulier majorée– notons M un majorant de cette suite ; on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |d_n|\,\rho^n \leqslant M$.

Soit alors $a \in]0,\rho[$ et $x \in [-a,a]$: $\displaystyle \left|\sum_{k=0}^{n} d_k\, x^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |d_k\, x^k| = \sum_{k=0}^{n} |d_k|\, \rho^k \times \left|\frac{x}{\rho}\right|^k \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{a}{\rho}\right|^k \leqslant \frac{M}{1-|a/\rho|}$ *(somme d'une série géométrique de raison $q = \frac{a}{\rho}$, avec $|q| < 1$).*

Donc la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente ; de même pour $n \geqslant 2$:

$|f_n''(x)| \leqslant n\,(n-1)\, d_n\, a^n \leqslant M\, n\,(n-1) \left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n$, donc $\alpha_n = \displaystyle\max_{x\in[-a,a]} |f_n''(x)| = n\,(n-1)\,|d_n| a^n \leqslant Mn(n-1) \left(\frac{a}{\rho}\right)^n$

$\displaystyle \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \leqslant M \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left|\frac{a}{\rho}\right|^k \leqslant M\, \frac{2}{\big(1-(a/\rho)\big)^3}.$

La série $\sum \alpha_n$ converge, donc on peut appliquer les résultats prouvés precédemment ; la fonction S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a,a]$, et ce pour tout $a \in]0,\rho[$; ainsi S est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\rho,\rho[$

EXERCICE N°3

1. $X(\Omega) = [\![n\,,\,2\,n]\!]$ la dernière boule blanche est obtenue au mieux au rang n (que des blanches) et au plus tard au dernier tirage.
2. L'événement $[X \leqslant k]$ est réalisé si l'on a tiré toutes les boules blanches (et donc $k-n$ boules noires) au cours des k premiers tirages. Donc $P(X \leqslant k) = \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{2n}{n}}$
3. On déduit la loi de probabilité de X : $P(X=k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \dfrac{\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}}{\binom{2n}{n}}$ *(cette formule reste vraie pour $k = n$ puisque $\binom{n-1}{n} = 0$).*

   On remarque que $\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n} = \binom{k-1}{n-1}$, on aurait pu directement écrire que pour réaliser l'événement $[X=k]$, il faut tirer $n-1$ boules blanches au cours des $k-1$ premiers tirages, le k^{e} tirage comportant obligatoirement la dernière boule blanche (un seul choix).

   $\displaystyle E(X) = \sum_{k=n}^{2\,n} k\, \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2\,n}{n}} = \sum_{k=n}^{2\,n} n\, \frac{\binom{k}{n}}{\binom{2\,n}{n}} = n\, \frac{\binom{2\,n+1}{n+1}}{\binom{2\,n}{n}} = \frac{n\,(2\,n+1)}{n+1}$

   Rappel : la formule $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$ se prouve par récurrence par exemple.